

Probabilidad de detección en cámaras PET de detectores continuos

A. Iriarte Ruiz^{1,2}, R. Marabini^{1,2}, C.O.S. Sorzano^{1,3}

¹ Unidad de Biocomputación, Centro Nac. Biotecnología (CSIC), Madrid. {ana,roberto,coos}@cnb.uam.es

² Dept. Ingeniería Informática, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España.

³ Dept. Ingeniería de Sistemas Electrónicos y de Telecomunicación, Univ.San Pablo CEU, Madrid

Resumen

Presentamos un método para calcular la probabilidad de detección de un punto emitiendo en el interior de una cámara PET con geometría de placas planas paralelas. El método descrito puede incorporarse a los algoritmos de reconstrucción Expectation Maximization-Maximum Likelihood(EM-ML) para calcular el término de normalización, que representa la probabilidad de que una emisión de un voxel sea detectada. El método se basa en cálculo de ángulos sólidos y no en la suma constructiva sobre todas las posibles líneas de respuesta del sistema, y es, por lo tanto, especialmente adecuado para la reconstrucción a partir de datos de cámaras de detectores continuos. Se ha calculado la probabilidad de detección a lo largo de una circunferencia y se ha obtenido una función periódica pero no continua, de lo cual se deduce la ausencia de simetría cilíndrica pura en cámaras PET de placas planas paralelas.

1. Introducción

El trabajo de Shepp y Vardi [1] en “expectation maximization” dio lugar a los métodos estadísticos iterativos de reconstrucción tan ampliamente utilizados actualmente en la reconstrucción en cámaras PET. En los últimos 20 años gran parte del trabajo en algoritmos estadísticos se ha concentrado en buscar alternativas a la implementación del algoritmo EM-ML que proporcionen convergencia más rápida, mejor resolución, contraste y/o relación señal a ruido. Todos estos métodos se basan en la forma original del algoritmo EM-ML, que viene dada por:

$$\lambda^{\text{new}}(b) = \frac{\lambda^{\text{old}}(b) \sum_{d=1}^D \frac{n^*(d) p(d, b)}{\sum_{b'=1}^B \lambda^{\text{old}}(b') p(b', d)}}{p(b, \cdot)} \quad (1)$$

Donde $\lambda(b)$ representa la densidad de emisión en el voxel b ; $n^*(d)$ es el número de emisiones detectadas en la línea de respuesta d ; $p(d, b)$ es la probabilidad de que una emisión proveniente del voxel b , sea detectada en la línea d , y $p(b, \cdot)$ es la probabilidad de que una emisión del voxel b sea detectada en cualquier línea, y representa, por lo tanto, la sensibilidad del sistema a cada punto del campo de visión. Al conjunto de términos $p(b, \cdot)$ se le denomina habitualmente matriz de normalización y constituye uno de los aspectos clave en la implementación del algoritmo EM-ML. Los elementos de esta matriz se calculan habitualmente como la suma de probabilidades individuales de detección de una emisión ocurrida en un

voxel sobre todas las líneas de respuesta del sistema, haciendo uso de la naturaleza discreta de los cristales de los detectores [2]. Sin embargo, se ha desarrollado recientemente una nueva clase de detectores continuos, que suponen un problema a la hora de calcular el término de normalización por el método tradicional. Existen alternativas para el cálculo de la matriz de normalización asumiendo simetría cilíndrica en el sistema [4]. Sin embargo, como se demuestra en este artículo, las cámaras de placas planas paralelas no presentan simetría cilíndrica pura. En este estudio se calculan analíticamente los diferentes elementos de la matriz de normalización en cámaras de placas paralelas basado en el cálculo del ángulo sólido visto por cada punto en el detector. Los resultados obtenidos muestran la ausencia de simetría cilíndrica en la detectabilidad de sistemas de placas planas paralelas. Estudios posteriores podrían analizar los efectos de esta asimetría en las imágenes reconstruidas.

2. Teoría

2.1. Geometría del detector

Se estudiará un dispositivo de placas planas paralelas consistente en dos cabezas detectoras cuyas dimensiones y ejes de coordenadas se muestran en la Figura 1. Este dispositivo gira sobre el eje Z en pasos angulares discretos.

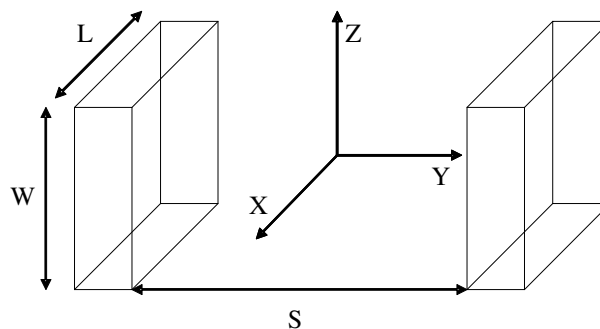


Figura 1. Geometría del detector

2.2. Probabilidad de detección en un plano.

En primer lugar se describirá un caso bidimensional en un plano paralelo a XY (Figura 2). Los ángulos que ve el punto b_0 de coordenadas (x_0, y_0, z_0) en cada detector, limitados por el plano $x=x_0$ son:

$$\alpha_1(y_0, z_0) = \arctan\left(\frac{\frac{W}{2} - z_0}{\frac{S}{2} - y_0}\right) \quad (2)$$

$$\beta_1(y_0, z_0) = \arctan\left(\frac{\frac{W}{2} + z_0}{\frac{S}{2} - y_0}\right) \quad (3)$$

Para el detector derecho, y:

$$\alpha_2(y_0, z_0) = \arctan\left(\frac{\frac{W}{2} + z_0}{\frac{S}{2} + y_0}\right) \quad (4)$$

$$\beta_2(y_0, z_0) = \arctan\left(\frac{\frac{W}{2} - z_0}{\frac{S}{2} + y_0}\right) \quad (5)$$

para el detector izquierdo.

El área total de líneas detectables emitidas por el punto en el plano $x=x_0$ estará limitado por α y β :

$$\alpha(y_0, z_0) = \min(\alpha_1(y_0, z_0), \alpha_2(y_0, z_0)) \quad (6)$$

$$\beta(y_0, z_0) = \min(\beta_1(y_0, z_0), \beta_2(y_0, z_0)) \quad (7)$$

Normalizando el área delimitada por estos ángulos por el área total de emisión del punto se obtiene como resultado la probabilidad de detección de un punto b_0 de coordenadas (x_0, y_0, z_0) en el área definida por la intersección del plano $x=x_0$ con los detectores:

$$p(b_0 | d\hat{I}(x=x_0)) = \frac{\alpha(y_0, z_0) + \beta(y_0, z_0)}{\pi} \quad (8)$$

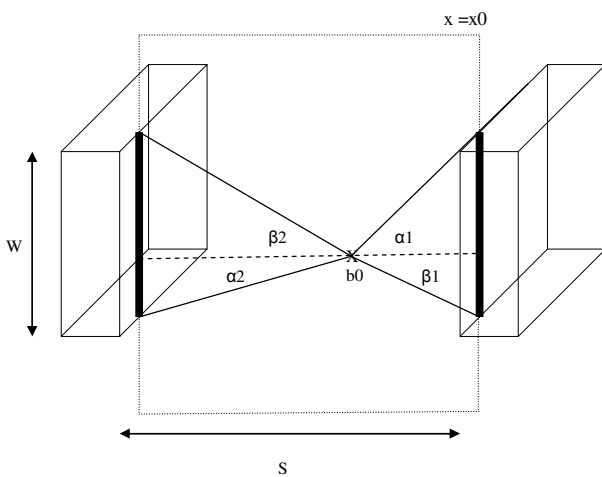


Figura 2. Ángulos vistos en $x=x_0$

El cálculo de la probabilidad de detección de b_0 en un plano cualquiera paralelo al eje de giro (Ecuación 9), se puede realizar fácilmente a partir de la Ecuación 8, aunque los ángulos α_1 , β_1 , α_2 , y β_2 deben calcularse

de una manera diferente. En nuestra notación, la ecuación general del plano es:

$$x - x_0 = \tan \gamma (y - y_0) \quad (9)$$

Como puede apreciarse en la vista del plano XY mostrada en la Figura 3, γ es el ángulo formado entre el plano considerado y el plano $x=x_0$.

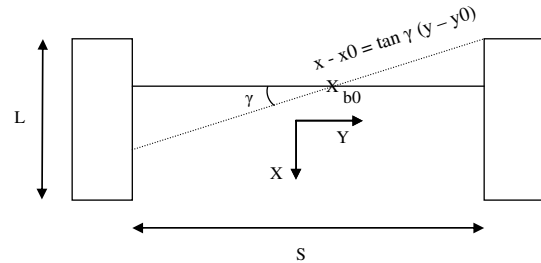


Figura 3. Significado de γ .

En este caso, los ángulos de vista desde el punto hacia el detector serán:

$$\alpha_1(y_0, z_0) = \angle Db_0F \quad (10)$$

$$\beta_1(y_0, z_0) = \angle Cb_0F \quad (11)$$

$$\alpha_2(y_0, z_0) = \angle Eb_0B \quad (12)$$

$$\beta_2(y_0, z_0) = \angle Ab_0E \quad (13)$$

En la figura 4 pueden observarse las posiciones para A, B, C, D, E y F. Los puntos E y F son los extremos del segmento resultante de la intersección del plano $z=z_0$ con el rectángulo delimitado por los vértices ABCD.

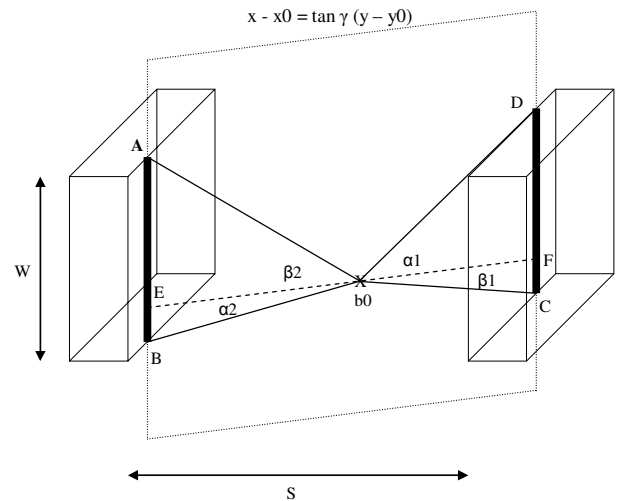


Figura 4. Ángulos vistos en $x-x_0=\gamma \tan(y-y_0)$

Las expresiones analíticas para A, B, C, D, E y F son:

$$A = (x_0 - (S/2 + y_0) * \tan(\gamma), -S/2, W/2) \quad (14)$$

$$B = (x_0 - (S/2 + y_0) * \tan(\gamma), -S/2, -W/2) \quad (15)$$

$$C = (x_0 + (S/2 - y_0) * \tan(\gamma), S/2, -W/2) \quad (16)$$

$$D = (x_0 + (S / 2 - y_0) * \tan(\gamma), S / 2, W / 2) \quad (17)$$

$$E = (x_0 - (S / 2 + y_0) * \tan(\gamma), -S / 2, z_0) \quad (18)$$

$$F = (x_0 - (S / 2 + y_0) * \tan(\gamma), S / 2, z_0) \quad (19)$$

2.3. Probabilidad de detección en un escáner completo de placas planas paralelas.

En primer lugar, se considerará un simple dispositivo formado por dos placas paralelas sin rotación. La probabilidad de que un punto b0 sea detectado en esta cámara se calculará integrando la Ecuación 8 en el rango definido por el ángulo visto por el punto en las placas detectoras, esta vez en el plano XY, como muestra la Figura 5.

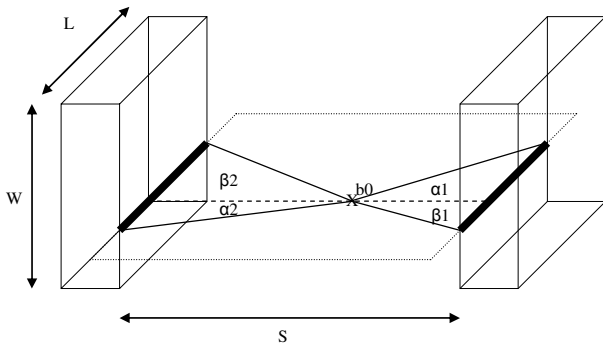


Figura 5. Ángulos vistos en el plano XY

Las expresiones para los ángulos vistos por el punto en el plano XY son, por lo tanto:

$$\alpha_1(x_0, y_0) = \arctan\left(\frac{\frac{L}{2} + x_0}{\frac{S}{2} - y_0}\right) \quad (20)$$

$$\beta_1(x_0, y_0) = \arctan\left(\frac{\frac{L}{2} - x_0}{\frac{S}{2} - y_0}\right) \quad (21)$$

Para el detector derecho, y:

$$\alpha_2(x_0, y_0) = \arctan\left(\frac{\frac{L}{2} - x_0}{\frac{S}{2} + y_0}\right) \quad (22)$$

$$\beta_2(x_0, y_0) = \arctan\left(\frac{\frac{L}{2} + x_0}{\frac{S}{2} + y_0}\right) \quad (23)$$

para el detector izquierdo.

El rango de posibles detecciones en coincidencia está limitado por:

$$\alpha(x_0, y_0) = -\min(\alpha_1(x_0, y_0), \alpha_2(x_0, y_0)) \quad (24)$$

$$\beta(x_0, y_0) = \min(\beta_1(x_0, y_0), \beta_2(x_0, y_0)) \quad (25)$$

La expresión para la probabilidad de detección de b0 en el caso de dos placas planas paralelas sin rotación (en adelante $p(b_0, \cdot)_{step_0}$ en nuestra notación) es, por lo tanto:

$$\int_{\alpha(x_0, y_0)}^{\beta(x_0, y_0)} p(b_0 | d \in (x - x_0 = \tan \gamma(y - y_0))) p(d \in (x - x_0 = \tan \gamma(y - y_0))) d\gamma \quad (26)$$

Es decir, la probabilidad de detectar un rayo aleatoriamente emitido por b0 es la integral sobre todos los planos detectables de la probabilidad de detectar el rayo asumiendo que ha sido emitido en los límites definidos por γ . Asumiremos que la probabilidad de emitir un rayo en un plano es la misma para todos, y por tanto:

$$p(d \in (x - x_0 = \tan \gamma(y - y_0))) = \frac{1}{\pi} \quad (27)$$

Si las cabezas detectoras de la Figura 5 rotan un número entero i de pasos discretos sobre el eje Z, la probabilidad de detección de b0 en la nueva posición de los detectores (en nuestra notación $p(b_0, \cdot)_{step_i}$) se puede calcular fácilmente a partir de las expresiones para el caso sin rotación simplemente rotando el punto y dejando las cabezas detectoras en su posición original. Una vez aplicada la rotación angular a b0, los límites de integración $(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))$ de la Ecuación 26 se obtienen restando el ángulo rotado a los resultados de las Ecuaciones 20...25 evaluadas en las nuevas coordenadas de b0. A continuación, para cada γ definido entre estos límites, la probabilidad de detección dentro de un plano se puede obtener aplicando directamente las ecuaciones 10..19 a las posiciones rotadas de b0.

Para el caso general de un detector de placas planas paralelas con rotación, la probabilidad de detectar una emisión cualquiera de b0 es la probabilidad de detectarla en cualquiera de las posiciones de los detectores (asumiendo una tasa constante de emisión). Por lo tanto, la probabilidad final puede calcularse como la probabilidad de una unión de sucesos correspondientes a las diferentes posiciones angulares de las cabezas detectoras. La probabilidad de la unión de eventos es igual a la suma de las probabilidades individuales, menos la probabilidad de las dobles intersecciones, más la probabilidad de las triples intersecciones, etc. En este contexto, la probabilidad de una intersección debe ser entendida como la probabilidad de un rayo de ser detectado en más de una posición angular (ver Figura 6). Para un dispositivo con N posiciones angulares posibles, la probabilidad de detección de b0 puede expresarse como:

$$p(b_0, \cdot) = \sum_{i=0}^{N-1} p(b_0, \cdot)_{step_i} - \sum_{i,j} p(b_0, \cdot)_{step_i \cap step_j} + \sum_{i,j,k} p(b_0, \cdot)_{step_i \cap step_j \cap step_k} + \dots + (-1)^{N-1} p(b_0, \cdot)_{step_0 \cap step_1 \cap \dots \cap step_{N-1}} \quad (27)$$

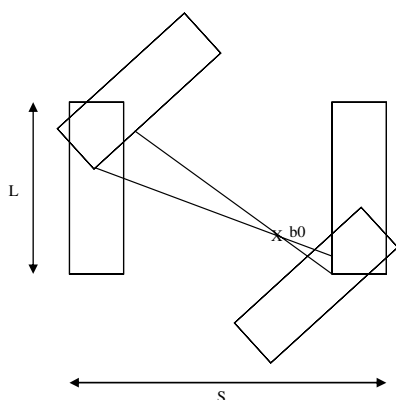


Figura 6. Ejemplo de direcciones de emisión detectables en más de una posición angular.

La probabilidad de una intersección de eventos se puede calcular también a partir de la Ecuación 26, restringiendo los límites de integración al dominio angular compartido por las posiciones angulares involucradas:

$$\begin{aligned} & (\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))_{\text{step}_1 \cap \text{step}_j \dots \cap \text{step}_k} = \\ & (\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))_{\text{step}_1} \cap (\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))_{\text{step}_j} \\ & \cap \dots (\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))_{\text{step}_k} \end{aligned} \quad (28)$$

Después, para cada plano entre estos límites, la probabilidad de detección en un plano se puede calcular aplicando la Ecuación 8 a los valores de $\alpha(y_0, z_0), \beta(y_0, z_0)$ resultantes de la intersección de los $\alpha(y_0, z_0), \beta(y_0, z_0)$ de las posiciones consideradas individualmente:

$$\begin{aligned} & (\alpha(y_0, z_0), \beta(y_0, z_0))_{\text{step}_1 \cap \text{step}_j \dots \cap \text{step}_k} = \\ & (\alpha(y_0, z_0), \beta(y_0, z_0))_{\text{step}_1} \cap (\alpha(y_0, z_0), \beta(y_0, z_0))_{\text{step}_j} \\ & \cap \dots (\alpha(y_0, z_0), \beta(y_0, z_0))_{\text{step}_k} \end{aligned} \quad (29)$$

3. Resultados

Se ha implementado el método descrito para un dispositivo con $W=42$ mm, $L=42$ mm y $d=82$ mm y un intervalo angular de 22.5 grados. La integral de la Ecuación 26 se ha obtenido mediante la regla de Simpson con 100 segmentos. La Figura 7 muestra la probabilidad de detección a lo largo de una circunferencia de 3 cm de radio en el plano XY centrado en el centro de la cámara.

La distribución de la probabilidad a lo largo de la circunferencia es periódica pero no constante, y se puede concluir, por lo tanto, que la cámara de placas planas paralelas no se comporta exactamente como una cámara cilíndrica. Se observan en la Figura 7 dieciséis picos correspondientes a las dieciséis posiciones angulares que supone la rotación en pasos de 22.5 grados. La fluctuación en la probabilidad es de aproximadamente un 14% alrededor de un valor constante.

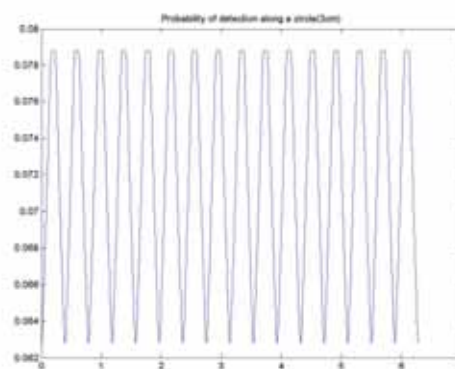


Figura 7. Probabilidad de detección a lo largo de una circunferencia

4. Conclusiones

Hemos presentado un método para calcular la probabilidad de detección de un punto emitiendo en el interior de una cámara PET de placas planas paralelas. Éste método puede incorporarse en la implementación del algoritmo de reconstrucción EM-ML, para obtener el término de normalización. Se ha calculado la probabilidad de detección a lo largo de una circunferencia a partir del método descrito y se ha encontrado una falta de simetría cilíndrica pura en cámaras de placas planas paralelas. Esta distribución muestra sin embargo un comportamiento periódico determinado por el número de posiciones angulares de los detectores. El efecto de esta asimetría en la reconstrucción puede dar lugar a estudios posteriores.

Acknowledgments

Agradecemos el apoyo de la “Comunidad Autónoma de Madrid” a través de las becas CAM-07B-0032-2002 y GR/SAL/0342/2004, la “Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología” de España a través de las becas BIO2001-1237, BIO2001-4253-E, BIO2001-4339-E, BIO2002-10855-E, BFU2004-00217/BMC, y TIC990361, las becas de la unión europea QLK2-2000-00634, QLRI-2000-31237, QLRT-2000-0136, QLRI-2001-00015, la NIH a través de la beca HL70472, y la “Fundación de Investigación Sanitaria” a través de la red FIS G03/185 y la beca PI040683.

Referencias

- Shepp LA, Vardi Y, Maximum Likelihood reconstruction for emisión tomography. *Journal of the American Statistical Association*, vol 80, No 389, 1985.
- Rahmim A, Lenox M, Reader AJ, Michel C, Burbar Z, Ruth TJ, Sossi V, Statistical list-mode image reconstruction for the high resolution research tomography. *Institute of Physics Publishing*. vol 49, 2004, pp 4239-4258.
- Tavernier S, Bruyndonckx P, Léonard S, Devroede O, A high-resolution PET detector based on continuous scintillators. *Nucl. Instr. meth.*, A537, 2005, 321-325.
- Reader AJ, Erlandsson K, Flower MA, Ott RJ, Fast accurate iterative reconstruction for low-statistics positron volume imaging. *Phys. Med. Biol*, vol 43, 1998, pp 835-846.