Ejercicios de Cálculo de 1º

By C.O.S. Sorzano

14 de diciembre de 2025

Estructuras algebraicas

Retículo

$(B, \oplus, \odot, \sim)$ es Retículo donde $\oplus, \odot$ son operaciones binarias internas si se cumple $\forall a, b, c \in B$

Conmutatividad	$a \oplus b = b \oplus a$	$a \odot b = b \odot a$
Asociatividad	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
Absorción	$a \oplus (a \odot b) = a$	$a \odot (a \oplus b) = a$

Teoremas:

Idempotencia $\quad a \oplus a = a \quad a \odot a = a$

Retículo distributivo=Retículo+

Distributividad $\quad a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c) \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

Álgebra de Boole=Retículo distributivo+

tiene elemento mínimo 0 (elemento neutro de $\oplus$) y máximo 1 (elemento neutro de $\odot$) y cada elemento a tiene un complementario $\sim a$ tal que

Elemento neutro	$a \oplus 0 = a$	$a \odot 1 = a$	
Elemento complementario	$a \oplus \sim a = 1$	$a \odot \sim a = 0$	(se deben cumplir las dos)

Por ser retículo distributivo, el complementario de cada elemento es único. Además, $\sim 0 = 1$.

Teoremas:

Ley de involución	$\sim (\sim a) = a$	
Dominación	$a \oplus 1 = 1$	$a \odot 0 = 0$
Ley de Morgan	$a \oplus b = \sim (\sim a \odot \sim b)$	$a \odot b = \sim (\sim a \oplus \sim b)$

Principio de dualidad:

Cualquier identidad es válida también tras intercambiar $\oplus \leftrightarrow \odot, \qquad 0 \leftrightarrow 1$.

Teoría de conjuntos

Igualdad: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Complementario: $A^c = \{x \in U \,|\, x \notin A\}$

Diferencia: $A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\} = A \cap B^c$

Diferencia simétrica: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Producto cartesiano: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}$

Álgebra de conjuntos. $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole para cualquier conjunto U, donde $P(U)$ es el conjunto de partes de U (todos los subconjuntos posibles de U), el complemento es el complemento de conjuntos, y los elementos neutros de la unión ($\cup$) y la intersección ($\cap$) son $\varnothing$ y U, respectivamente.

Fórmulas útiles

$A \setminus B = A \cap B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Ejercicio 1. **(Retículos algebraicos) Sea $(B, \oplus, \odot)$ un retículo, es decir, $\oplus$ y $\odot$ son internas, conmutativas y asociativas, y satisfacen las leyes de absorción, para todo $x, y \in B$:**

$$\text{(Abs1)} \quad x \oplus (x \odot y) = x, \qquad \text{(Abs2)} \quad x \odot (x \oplus y) = x.$$

Demostrar la idempotencia de $\oplus$ y de $\odot$:

$$\forall a \in B: \quad a \oplus a = a, \qquad a \odot a = a.$$

Solución:
Idempotencia de $\oplus$. Sea $a \in B$. Aplicamos (Abs2) con $x = a$ e $y = a$:

$$a \odot (a \oplus a) = a. \tag{1}$$

Aplicamos ahora (Abs1) con $x = a$ e $y = (a \oplus a)$:

$$a \oplus \big(a \odot (a \oplus a)\big) = a. \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) obtenemos

$$a \oplus a = a.$$

Idempotencia de $\odot$. Sea $a \in B$. Aplicamos (Abs1) con $x = a$ e $y = a$:

$$a \oplus (a \odot a) = a. \tag{3}$$

Aplicamos ahora (Abs2) con $x = a$ e $y = (a \odot a)$:

$$a \odot \big(a \oplus (a \odot a)\big) = a. \tag{4}$$

Sustituyendo (3) en (4) obtenemos

$$a \odot a = a.$$

. . . .

Ejercicio 2. **(Retículos algebraicos) Sea $(B, \oplus, \odot)$ un retículo. Definir una relación $\leq$ en B por**

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x \oplus y = y,$$

y probar que, para cualesquiera $a, b \in B$, se cumple

$$a \leq a \oplus b \qquad \text{y} \qquad b \leq a \oplus b.$$

Solución:
Demostración de $a \leq a \oplus b$. Por definición de $\leq$, basta probar que

$$a \oplus (a \oplus b) = a \oplus b.$$

$$\begin{aligned} a \oplus (a \oplus b) &= (a \oplus a) \oplus b && \text{(asociatividad de } \oplus\text{)} \\ &= a \oplus b && \text{(idempotencia de } \oplus\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, $a \oplus (a \oplus b) = a \oplus b$, y se concluye que $a \leq a \oplus b$.

Demostración de $b \leq a \oplus b$.
Por definición de $\leq$, basta probar que

$$b \oplus (a \oplus b) = a \oplus b.$$

$$\begin{aligned} b \oplus (a \oplus b) &= (b \oplus a) \oplus b && \text{(asociatividad de } \oplus\text{)} \\ &= (a \oplus b) \oplus b && \text{(conmutatividad de } \oplus\text{)} \\ &= a \oplus (b \oplus b) && \text{(asociatividad de } \oplus\text{)} \\ &= a \oplus b && \text{(idempotencia de } \oplus\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, $b \oplus (a \oplus b) = a \oplus b$, y se concluye que $b \leq a \oplus b$.

....

Ejercicio 3. (Retículos algebraicos) Sea $(B, \oplus, \odot)$ un retículo. Definimos $\leq$ como en el ejercicio anterior. Probar que, para cualesquiera $a, b \in B$, se cumple

$$a \odot b \leq a \qquad \text{y} \qquad a \odot b \leq b.$$

Solución: Por definición de $\leq$, basta probar las igualdades

$$(a \odot b) \oplus a = a \qquad \text{y} \qquad (a \odot b) \oplus b = b.$$

Demostración de $a \odot b \leq a$.

$$\begin{aligned} (a \odot b) \oplus a &= a \oplus (a \odot b) && \text{(conmutatividad de } \oplus\text{)} \\ &= a && \text{(absorción: } a \oplus (a \odot b) = a\text{)} \end{aligned}$$

Demostración de $a \odot b \leq b$.

$$\begin{aligned} (a \odot b) \oplus b &= b \oplus (a \odot b) && \text{(conmutatividad de } \oplus\text{)} \\ &= b && \text{(absorción: } b \oplus (b \odot a) = b \text{ y conmutatividad de } \odot\text{)} \end{aligned}$$

....

Ejercicio 4. (Retículos algebraicos) Sea $(B, \oplus, \odot)$ un retículo (algebraico). Definimos dos relaciones en B:

$$x \leq_{\oplus} y \iff x \oplus y = y, \qquad\qquad x \leq_{\odot} y \iff x \odot y = x.$$

Demostrar que ambas relaciones coinciden, es decir, que para cualesquiera $x, y \in B$

$$x \leq_{\oplus} y \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq_{\odot} y.$$

Solución: Sean $x, y \in B$.

(1) Si $x \leq_{\oplus} y$, entonces $x \leq_{\odot} y$. Supongamos

$$x \oplus y = y.$$

Queremos probar

$$x \odot y = x.$$

$$\begin{aligned} x \odot y &= x \odot (x \oplus y) && \text{(sustitución: } x \oplus y = y) \\ &= x && \text{(absorción: } x \odot (x \oplus y) = x) \end{aligned}$$

Por tanto, $x \odot y = x$, es decir, $x \leq_{\odot} y$.

(2) Si $x \leq_{\odot} y$, entonces $x \leq_{\oplus} y$. Supongamos

$$x \odot y = x.$$

Queremos probar

$$x \oplus y = y.$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x \odot y) \oplus y && \text{(sustitución: } x \odot y = x) \\ &= y \oplus (x \odot y) && \text{(conmutatividad de } \oplus) \\ &= y && \text{(absorción-)} \end{aligned}$$

Por tanto, $x \oplus y = y$, es decir, $x \leq_{\oplus} y$.

Como hemos probado ambas implicaciones, concluimos que

$$x \leq_{\oplus} y \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq_{\odot} y,$$

y por tanto las dos definiciones de orden son equivalentes.

. . . .

Ejercicio 5. (Retículos algebráicos) Demostrar que $\leq$ define una relación de orden y que $\oplus$ y $\odot$ coinciden con el supremo y el ínfimo.
Solución: La relación $\leq$ en B está definida por

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad a \oplus b = b.$$

(1) La relación $\leq$ es un orden parcial.

- *Reflexividad.* Por la idempotencia de $\oplus$, se tiene $a \oplus a = a$, luego $a \leq a$.

- *Antisimetría.* Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces

$$a \oplus b = b \quad \text{y} \quad b \oplus a = a.$$

Por conmutatividad de $\oplus$, ambas igualdades implican $a = b$.

- *Transitividad.* Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces

$$a \oplus b = b \quad \text{y} \quad b \oplus c = c.$$

Usando asociatividad y conmutatividad,

$$a \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = b \oplus c = c,$$

luego $a \leq c$.

Por tanto, $\leq$ es una relación de orden parcial en B.

(2) $\oplus$ es el supremo. Por ejercicios anteriores, sabemos que esta relación es reflexiva y que $a \leq a \oplus b$ y $b \leq a \oplus b$, es decir, $a \oplus b$ es una cota superior de $\{a, b\}$. Resta probar que es la *menor* de todas las cotas superiores.

Minimalidad. Sea $c \in B$ una cota superior de a y b, es decir,

$$a \leq c \qquad \text{y} \qquad b \leq c.$$

Por definición de $\leq$, esto equivale a

$$a \oplus c = c \qquad \text{y} \qquad b \oplus c = c.$$

Queremos demostrar que $a \oplus b \leq c$, esto es,

$$(a \oplus b) \oplus c = c.$$

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= a \oplus (b \oplus c) && \text{(asociatividad de } \oplus\text{)} \\ &= a \oplus c && \text{(porque } b \oplus c = c\text{)} \\ &= c && \text{(porque } a \oplus c = c\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, $(a \oplus b) \oplus c = c$, y se concluye que

$$a \oplus b \leq c.$$

En consecuencia, $a \oplus b$ es la menor cota superior de $\{a, b\}$, es decir,

$$a \oplus b = \sup\{a, b\}.$$

(3) $\odot$ es el ínfimo.
Por ejercicios anteriores, sabemos que

$$a \odot b \leq a \qquad \text{y} \qquad a \odot b \leq b,$$

es decir, $a \odot b$ es una cota inferior de $\{a, b\}$. Resta probar que es la *mayor* de todas las cotas inferiores.

Maximalidad. Sea $c \in B$ una cota inferior de a y b, es decir,

$$c \leq a \qquad \text{y} \qquad c \leq b.$$

Usando la caracterización equivalente del orden,

$$x \leq y \iff x \odot y = x,$$

estas desigualdades equivalen a

$$c \odot a = c \qquad \text{y} \qquad c \odot b = c.$$

Queremos demostrar que $c \leq a \odot b$, lo que, de nuevo por la definición del orden, equivale a probar que

$$c \odot (a \odot b) = c.$$

$$\begin{aligned} c \odot (a \odot b) &= (c \odot a) \odot b && \text{(asociatividad de } \odot\text{)} \\ &= c \odot b && \text{(porque } c \odot a = c\text{)} \\ &= c && \text{(porque } c \odot b = c\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, $c \odot (a \odot b) = c$, y se concluye que

$$c \leq a \odot b.$$

En consecuencia, $a \odot b$ es la mayor cota inferior de $\{a, b\}$, es decir,

$$a \odot b = \text{ínf}\{a, b\}.$$

....

Ejercicio 6. (Retículos algebraicos) Demostrar la idempotencia para cualquier retículo.

Solución: Sea $(B, \oplus, \odot)$ un retículo. Por definición, para cualesquiera $a, b \in B$ existen el supremo $a \oplus b = \sup\{a, b\}$ y el ínfimo $a \odot b = \text{ínf}\{a, b\}$.
En particular, para todo $a \in B$ se tiene

$$a \oplus a = \sup\{a, a\}.$$

Como el supremo de un conjunto con un único elemento es ese mismo elemento, se sigue que

$$a \oplus a = a.$$

De manera análoga,

$$a \odot a = \text{ínf}\{a, a\} = a.$$

Concluimos que en cualquier retículo ambas operaciones son idempotentes.

. . . .

Ejercicio 7. **(Álgebra de Boole) Sea $(B, \oplus, \odot, \sim)$ un álgebra de Boole. Demostrar que, para todo $a \in B$, se cumple la *ley de involución*:**

$$\sim (\sim a) = a.$$

Solución: Sea $a \in B$. Por definición, $\sim a$ es el complemento de a, es decir,

$$a \oplus \sim a = 1 \qquad \text{y} \qquad a \odot \sim a = 0.$$

Queremos demostrar que a es el complemento de $\sim a$. Para ello, comprobamos que a satisface las dos propiedades que definen al complemento de $\sim a$.

(1) Primera condición: $\sim a \oplus a = 1$.

$$\begin{aligned} \sim a \oplus a &= a \oplus \sim a && \text{(conmutatividad de } \oplus\text{)} \\ &= 1 && \text{(definición de complemento)} \end{aligned}$$

(2) Segunda condición: $\sim a \odot a = 0$.

$$\begin{aligned} \sim a \odot a &= a \odot \sim a && \text{(conmutatividad de } \odot\text{)} \\ &= 0 && \text{(definición de complemento)} \end{aligned}$$

Como a verifica ambas propiedades, es un complemento de $\sim a$. Pero en un álgebra de Boole el complemento es único, luego

$$\sim (\sim a) = a.$$

Concluimos que el operador complemento es involutivo.

. . . .

Ejercicio 8. **(Álgebra de Boole)** Sea $(B, \oplus, \odot, \sim)$ un álgebra de Boole. Demostrar que, para todo $a \in B$, se cumplen las leyes de dominación:

$$a \oplus 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad a \odot 0 = 0.$$

Solución:

Demostración de $a \oplus 1 = 1$.
Como 1 es el complemento de 0 y $a \oplus \sim a = 1$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
a \oplus 1 &= a \oplus (a \oplus \sim a) && \text{(porque } a\oplus \sim a = 1\text{)}\\
&= (a \oplus a) \oplus \sim a && \text{(asociatividad de } \oplus\text{)}\\
&= a \oplus \sim a && \text{(idempotencia de } \oplus\text{)}\\
&= 1 && \text{(definición de complemento)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $a \oplus 1 = 1$.

Demostración de $a \odot 0 = 0$.
Como 0 es el complemento de a respecto a $\odot$, es decir, $a\odot \sim a = 0$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
a \odot 0 &= a \odot (a \odot \sim a) && \text{(porque } a\odot \sim a = 0\text{)}\\
&= (a \odot a) \odot \sim a && \text{(asociatividad de } \odot\text{)}\\
&= a \odot \sim a && \text{(idempotencia de } \odot\text{)}\\
&= 0 && \text{(definición de complemento)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $a \odot 0 = 0$.

Concluimos que en cualquier álgebra de Boole se verifican las leyes de dominación.

. . . .

Ejercicio 9. (Álgebra de Boole) Sea $(B, \oplus, \odot, \sim)$ un álgebra de Boole (retículo distributivo con $0, 1$ y complementos). Demostrar que, para cualesquiera $a, b \in B$, se cumplen las leyes de De Morgan:

$$\sim (a \oplus b) = \sim a \odot \sim b, \qquad \sim (a \odot b) = \sim a \oplus \sim b.$$

Solución:

(1) Demostración de $\sim (a \oplus b) = \sim a \odot \sim b$. Basta probar que $\sim a \odot \sim b$ es el complemento de $a \oplus b$, es decir, que

$$(a \oplus b) \oplus (\sim a \odot \sim b) = 1 \qquad \text{y} \qquad (a \oplus b) \odot (\sim a \odot \sim b) = 0.$$

(i) Primera condición: $(a \oplus b) \oplus (\sim a \odot \sim b) = 1$.

$$
\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus (\sim a \odot \sim b) &= \big((a \oplus b) \oplus \sim a\big) \odot \big((a \oplus b) \oplus \sim b\big) && \text{(distributividad: } x \oplus (y \odot z) = (x \oplus y) \odot (x \oplus z)\text{)}\\
&= \big((a \oplus \sim a) \oplus b\big) \odot \big(a \oplus (b \oplus \sim b)\big) && \text{(asociatividad y conmutatividad de } \oplus\text{)}\\
&= (1 \oplus b) \odot (a \oplus 1) && \text{(complemento: } a\oplus \sim a = 1,\ b \oplus \sim b = 1\text{)}\\
&= 1 \odot 1 && \text{(dominación: } 1 \oplus b = 1,\ a \oplus 1 = 1\text{)}\\
&= 1 && \text{(neutro de } \odot\text{)}
\end{aligned}
$$

(ii) Segunda condición: $(a \oplus b) \odot (\sim a \odot \sim b) = 0$.

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \odot (\sim a \odot \sim b) &= \big((a \oplus b) \odot \sim a\big) \odot \sim b && \text{(asociatividad de } \odot) \\
&= \big((a \odot \sim a) \oplus (b \odot \sim a)\big) \odot \sim b && \text{(distributividad: } (x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)) \\
&= \big(0 \oplus (b \odot \sim a)\big) \odot \sim b && \text{(complemento: } a \odot \sim a = 0) \\
&= (b \odot \sim a) \odot \sim b && \text{(neutro de } \oplus\text{: } 0 \oplus x = x) \\
&= b \odot (\sim b \odot \sim a) && \text{(conmutatividad y asociatividad de } \odot) \\
&= (b \odot \sim b) \odot \sim a && \text{(asociatividad de } \odot) \\
&= 0 \odot \sim a && \text{(complemento: } b \odot \sim b = 0) \\
&= 0 && \text{(dominación: } 0 \odot x = 0)
\end{aligned}$$

Como $\sim a \odot \sim b$ cumple ambas condiciones, es el complemento de $a \oplus b$, y por unicidad del complemento en un retículo distributivo concluimos

$$\sim (a \oplus b) = \sim a \odot \sim b.$$

(2) Demostración de $\sim (a \odot b) = \sim a \oplus \sim b$. De nuevo, basta probar que $\sim a \oplus \sim b$ es el complemento de $a \odot b$, es decir, que

$$(a \odot b) \oplus (\sim a \oplus \sim b) = 1 \qquad \text{y} \qquad (a \odot b) \odot (\sim a \oplus \sim b) = 0.$$

(i) Primera condición: $(a \odot b) \oplus (\sim a \oplus \sim b) = 1$.

$$\begin{aligned}
(a \odot b) \oplus (\sim a \oplus \sim b) &= \big((a \odot b) \oplus \sim a\big) \oplus \sim b && \text{(asociatividad de } \oplus) \\
&= \big((a \oplus \sim a) \odot (b \oplus \sim a)\big) \oplus \sim b && \text{(distributividad: } (x \odot y) \oplus z = (x \oplus z) \odot (y \oplus z)) \\
&= \big(1 \odot (b \oplus \sim a)\big) \oplus \sim b && \text{(complemento: } a \oplus \sim a = 1) \\
&= (b \oplus \sim a) \oplus \sim b && \text{(neutro de } \odot\text{: } 1 \odot x = x) \\
&= \sim a \oplus (b \oplus \sim b) && \text{(conmutatividad y asociatividad de } \oplus) \\
&= \sim a \oplus 1 && \text{(complemento: } b \oplus \sim b = 1) \\
&= 1 && \text{(dominación: } x \oplus 1 = 1)
\end{aligned}$$

(ii) Segunda condición: $(a \odot b) \odot (\sim a \oplus \sim b) = 0$.

$$\begin{aligned}
(a \odot b) \odot (\sim a \oplus \sim b) &= \big((a \odot b) \odot \sim a\big) \oplus \big((a \odot b) \odot \sim b\big) && \text{(distributividad: } x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)) \\
&= \big((a \odot \sim a) \odot b\big) \oplus \big(a \odot (b \odot \sim b)\big) && \text{(asociatividad y conmutatividad de } \odot) \\
&= (0 \odot b) \oplus (a \odot 0) && \text{(complemento: } a \odot \sim a = 0,\ b \odot \sim b = 0) \\
&= 0 \oplus 0 && \text{(dominación: } 0 \odot x = 0) \\
&= 0 && \text{(idempotencia / neutro de } \oplus)
\end{aligned}$$

Como $\sim a \oplus \sim b$ cumple ambas condiciones, es el complemento de $a \odot b$, y por unicidad del complemento concluimos

$$\sim (a \odot b) = \sim a \oplus \sim b.$$

. . . .

Ejercicio 10. (Álgebra de Boole) Sea $(B, \oplus, \odot, \sim, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Recordamos el *principio de dualidad*:

> **Cualquier identidad válida en un álgebra de Boole sigue siendo válida al intercambiar simultáneamente**
>
> $$\oplus \leftrightarrow \odot, \qquad 0 \leftrightarrow 1.$$

(a) Partiendo de la ley de dominación

$$a \oplus 1 = 1,$$

escribir su identidad dual y comprobar que también es válida.
(b) Partiendo de la ley de absorción

$$a \oplus (a \odot b) = a,$$

escribir su identidad dual y comprobar que también es válida.
Solución:

(a) Dual de la ley de dominación.
La identidad original es

$$a \oplus 1 = 1.$$

Aplicando el principio de dualidad, intercambiamos $\oplus$ por $\odot$ y 1 por 0, obteniendo la identidad dual:

$$a \odot 0 = 0.$$

Esta igualdad es precisamente la segunda ley de dominación, ya demostrada. Por tanto, la identidad dual también es válida.

(b) Dual de la ley de absorción.
La identidad original es

$$a \oplus (a \odot b) = a.$$

Aplicando el principio de dualidad, intercambiamos $\oplus$ por $\odot$ y viceversa, obteniendo:

$$a \odot (a \oplus b) = a.$$

Esta igualdad corresponde a la segunda ley de absorción, válida en todo retículo, y por tanto también en un álgebra de Boole.

Concluimos que, una vez demostrada una identidad, su identidad dual es automáticamente válida, sin necesidad de una nueva demostración independiente.

....

Ejercicio 11. Demostrar que $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un retículo.

Solución: En un retículo $(B, \oplus, \odot)$ las operaciones $\oplus$ y $\odot$ deben ser internas en B y satisfacer conmutatividad, asociatividad y absorción.

En nuestro caso, $B = \mathcal{P}(U)$, $\oplus = \cup$ y $\odot = \cap$. Las operaciones son internas porque, dados $A, B \subseteq U$, también $A \cup B \subseteq U$ y $A \cap B \subseteq U$.

Probamos ahora las propiedades por razonamiento con elementos. Sean $A, B, C \subseteq U$ y $x \in U$.

Propiedad	**Unión** $\cup$	**Intersección** $\cap$
Conmutatividad	$x \in A \cup B \Leftrightarrow$ $(x \in A \text{ o } x \in B) \Leftrightarrow$ $(x \in B \text{ o } x \in A) \Leftrightarrow$ $x \in B \cup A.$	$x \in A \cap B \Leftrightarrow$ $(x \in A \text{ y } x \in B) \Leftrightarrow$ $(x \in B \text{ y } x \in A) \Leftrightarrow$ $x \in B \cap A.$
Asociatividad	$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow$ $x \in A \text{ o } (x \in B \text{ o } x \in C) \Leftrightarrow$ $(x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C) \Leftrightarrow$ $(x \in A \cup B) \text{ o } x \in C \Leftrightarrow$ $x \in (A \cup B) \cup C.$	$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow$ $x \in A \text{ y } (x \in B \text{ y } x \in C) \Leftrightarrow$ $(x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C) \Leftrightarrow$ $(x \in A \cap B) \text{ y } x \in C \Leftrightarrow$ $x \in (A \cap B) \cap C.$
Absorción	$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow$ $x \in A \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in B) \Leftrightarrow$ $x \in A \Leftrightarrow$ $x \in A.$	$x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow$ $x \in A \text{ y } (x \in A \text{ o } x \in B) \Leftrightarrow$ $x \in A \Leftrightarrow$ $x \in A.$

Como ambas operaciones son internas y satisfacen conmutatividad, asociatividad y absorción, $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un retículo.

....

Ejercicio 12. (Álgebra de conjuntos) Demostrar que $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un retículo distributivo.

Solución: Ya sabemos que $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un retículo, donde la unión juega el papel de supremo y la intersección el de ínfimo. Para que sea *distributivo* debemos comprobar que, para cualesquiera $A, B, C \subseteq U$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{y} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Probamos la primera igualdad por doble inclusión. Sea $x \in U$. Si $x \in A \cap (B \cup C)$, entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$, es decir, $x \in B$ o $x \in C$.

- Si $x \in B$, entonces $x \in A \cap B$.
- Si $x \in C$, entonces $x \in A \cap C$.

En cualquier caso, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Recíprocamente, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. En cualquier caso, $x \in A$ y además $x \in B$ o $x \in C$, es decir, $x \in B \cup C$. Por tanto $x \in A \cap (B \cup C)$.
Hemos probado

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Probamos ahora la segunda ley distributiva, también por doble inclusión. Sea $x \in U$.

(1) Demostrar $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Supongamos $x \in A \cup (B \cap C)$. Entonces se cumple:

$$x \in A \quad \text{o} \quad x \in B \cap C.$$

- Si $x \in A$, entonces claramente $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, por lo que
$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
- Si $x \in B \cap C$, entonces $x \in B$ y $x \in C$. En particular, $x \in A \cup B$ (porque $x \in B$) y $x \in A \cup C$ (porque $x \in C$), luego
$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

En cualquiera de los dos casos, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, y por tanto

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(2) Demostrar $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.
Supongamos ahora $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Entonces

$$x \in A \cup B \quad \text{y} \quad x \in A \cup C.$$

Esto significa que:

$$(x \in A \text{ o } x \in B) \quad \text{y} \quad (x \in A \text{ o } x \in C).$$

Si $x \in A$, entonces claramente $x \in A \cup (B \cap C)$ y hemos terminado. Supongamos por tanto que $x \notin A$. Bajo esta suposición, de las condiciones anteriores se deduce:

- De $x \in A \cup B$ y $x \notin A$, se sigue que $x \in B$.
- De $x \in A \cup C$ y $x \notin A$, se sigue que $x \in C$.

Por tanto $x \in B$ y $x \in C$, es decir,

$$x \in B \cap C.$$

En consecuencia, $x \in A \cup (B \cap C)$.

Hemos probado que en todos los casos $x \in A \cup (B \cap C)$, luego

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

De (1) y (2) concluimos la igualdad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

es decir, la intersección distribuye sobre la unión.
Como en $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ se verifican ambas leyes distributivas, concluimos que es un *retículo distributivo.*

. . . .

Ejercicio 13. (Álgebra de Conjuntos) Sea U un conjunto y $\mathcal{P}(U)$ su conjunto de partes. Sabemos que $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un retículo distributivo. Definimos, para cada $A \subseteq U$, su complementario como

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Demostrar que $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap, ^c)$ es un Álgebra de Boole.
Solución:
Para probar que $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un Álgebra de Boole debemos verificar:

- la existencia de un elemento mínimo 0 y uno máximo 1,
- y que todo elemento $A \subseteq U$ admite un complemento.

(1) Elementos mínimo y máximo.
El conjunto vacío $\varnothing$ es el elemento mínimo, pues para todo $A \subseteq U$:

$$\varnothing \cup A = A, \qquad \varnothing \cap A = \varnothing.$$

El conjunto total U es el elemento máximo, pues para todo $A \subseteq U$:

$$A \cup U = U, \qquad A \cap U = A.$$

Por tanto, $\varnothing$ es el neutro de $\cup$ y U es el neutro de $\cap$.

(2) Existencia de complemento.
Sea $A \subseteq U$. Demostramos que A^c es un complemento de A.

(a) Primera condición: $A \cup A^c = U$.
Sea $x \in U$. Entonces:

$$x \in A \cup A^c \iff (x \in A \text{ o } x \in A^c) \iff (x \in A \text{ o } x \notin A),$$

lo cual es siempre cierto. Por tanto,

$$A \cup A^c = U.$$

(b) Segunda condición: $A \cap A^c = \varnothing$.
Sea $x \in U$. Entonces:

$$x \in A \cap A^c \iff (x \in A \text{ y } x \in A^c) \iff (x \in A \text{ y } x \notin A),$$

lo cual es imposible. Por tanto,

$$A \cap A^c = \varnothing.$$

Hemos probado que, para todo $A \subseteq U$,

$$A \cup A^c = U \qquad \text{y} \qquad A \cap A^c = \varnothing,$$

es decir, que todo elemento de $\mathcal{P}(U)$ tiene complemento.

Como $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap)$ es un retículo distributivo, con elemento mínimo $\varnothing$, elemento máximo U y complemento para todo elemento, concluimos que

$$(\mathcal{P}(U), \cup, \cap, {}^c)$$

es un Álgebra de Boole.

....

Ejercicio 14. (Álgebra de conjuntos) Demostrar que, para cualesquiera conjuntos A, B, D, se cumple

$$A \setminus B \subseteq (A \setminus D) \cup (D \setminus B).$$

Solución: Sea $x \in A \setminus B$. Por definición,

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad x \notin B.$$

Consideramos dos casos:

Caso 1: $x \notin D$. Entonces, como $x \in A$ y $x \notin D$, se cumple

$$x \in A \setminus D.$$

Por tanto,

$$x \in (A \setminus D) \cup (D \setminus B).$$

Caso 2: $x \in D$. Entonces, como $x \in D$ y $x \notin B$, se cumple

$$x \in D \setminus B.$$

Por tanto,

$$x \in (A \setminus D) \cup (D \setminus B).$$

En ambos casos, $x \in (A \setminus D) \cup (D \setminus B)$. Como x era arbitrario en $A \setminus B$, concluimos que

$$A \setminus B \subseteq (A \setminus D) \cup (D \setminus B).$$

. . . .

Ejercicio 15. **Sea**

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}.$$

Definir y calcular los siguientes conjuntos:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B.$$

Solución:

1) Unión $A \cup B$.
Por definición,

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Como $A = (-1, 1)$ y $B = [0, 2]$, se obtiene

$$A \cup B = (-1, 2].$$

2) Intersección $A \cap B$.
Por definición,

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Los valores comunes a ambos conjuntos son los que cumplen $0 \leq x < 1$, luego

$$A \cap B = [0, 1).$$

3) Diferencia $A \setminus B$.
Por definición,

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Esto equivale a $-1 < x < 0$, por tanto

$$A \setminus B = (-1, 0).$$

4) Diferencia $B \setminus A$.
Por definición,

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}.$$

Esto ocurre cuando $1 \leq x \leq 2$, luego

$$B \setminus A = [1, 2].$$

5) Diferencia simétrica $A \triangle B$.
Por definición,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Sustituyendo los resultados anteriores,

$$A \triangle B = (-1, 0) \cup [1, 2].$$

. . . .

Ejercicio 16. **(Álgebra de conjuntos) Sea**

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x < 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \geq 0\}.$$

Definir y calcular los siguientes conjuntos:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B.$$

Solución:

1) Determinación de los conjuntos A y B.
Conjunto A. Resolvemos la desigualdad:

$$x^2 - 2x < 0 \iff x(x-2) < 0.$$

El producto es negativo cuando $0 < x < 2$, luego

$$A = (0, 2).$$

Conjunto B. Resolvemos la desigualdad:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff (x-1)(x-2) \geq 0.$$

El producto es no negativo cuando $x \leq 1$ o $x \geq 2$, luego

$$B = (-\infty, 1] \cup [2, \infty).$$

2) Unión $A \cup B$.

$$A \cup B = (0, 2) \cup \big((-\infty, 1] \cup [2, \infty)\big) = \mathbb{R}.$$

3) Intersección $A \cap B$.

$$A \cap B = (0, 2) \cap \big((-\infty, 1] \cup [2, \infty)\big) = (0, 1].$$

4) Diferencia $A \setminus B$.

$$A \setminus B = (0,2) \setminus \big((-\infty,1] \cup [2,\infty)\big) = (1,2).$$

5) Diferencia $B \setminus A$.

$$B \setminus A = \big((-\infty,1] \cup [2,\infty)\big) \setminus (0,2) = (-\infty,0] \cup [2,\infty).$$

6) Diferencia simétrica $A \triangle B$.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (1,2) \cup \big((-\infty,0] \cup [2,\infty)\big) = (-\infty,0] \cup (1,\infty).$$

. . . .

Ejercicio 17. (Álgebra de conjuntos) Sea

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + |x-2| < 2\}.$$

Definir y calcular los siguientes conjuntos:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B.$$

Solución:

1) Determinación de A y B.
Conjunto A.

$$|x| < 2 \iff -2 < x < 2, \qquad \Rightarrow \qquad A = (-2,2).$$

Conjunto B. Estudiamos por casos:

$$|x-1| + |x-2| = \begin{cases} (1-x) + (2-x) = 3 - 2x, & x \leq 1, \\ (x-1) + (2-x) = 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ (x-1) + (x-2) = 2x - 3, & x \geq 2. \end{cases}$$

Imponiendo $|x-1| + |x-2| < 2$:

$$\begin{aligned} x \leq 1: &\quad 3 - 2x < 2 \iff x > \tfrac{1}{2}, \\ 1 \leq x \leq 2: &\quad 1 < 2 \iff \text{(siempre cierto)}, \\ x \geq 2: &\quad 2x - 3 < 2 \iff x < \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$B = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

2) Unión $A \cup B$.

$$A \cup B = (-2, 2) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(-2, \frac{5}{2}\right).$$

3) Intersección $A \cap B$.

$$A \cap B = (-2, 2) \cap \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

4) Diferencia $A \setminus B$.

$$A \setminus B = (-2, 2) \setminus \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(-2, \frac{1}{2}\right].$$

5) Diferencia $B \setminus A$.

$$B \setminus A = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \setminus (-2, 2) = \left[2, \frac{5}{2}\right).$$

6) Diferencia simétrica $A \triangle B$.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left(-2, \frac{1}{2}\right] \cup \left[2, \frac{5}{2}\right).$$

....

Ejercicio 18. (Álgebra de conjuntos) Sea $\delta > 0$ y consideremos en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < \delta\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \delta\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < \delta\}.$$

Demostrar que

$$A \subset B \subset C.$$

La Fig. 1 muestra estos 3 conjuntos para $\delta = 1$.
Solución:

(1) Demostración de $A \subset B$. Sea $(x, y) \in A$. Entonces

$$|x| + |y| < \delta.$$

Como $|x|, |y| \geq 0$, se cumple

$$(|x| + |y|)^2 \geq x^2 + y^2$$

porque

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2.$$

Tomando raíces (todas las cantidades son no negativas),

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

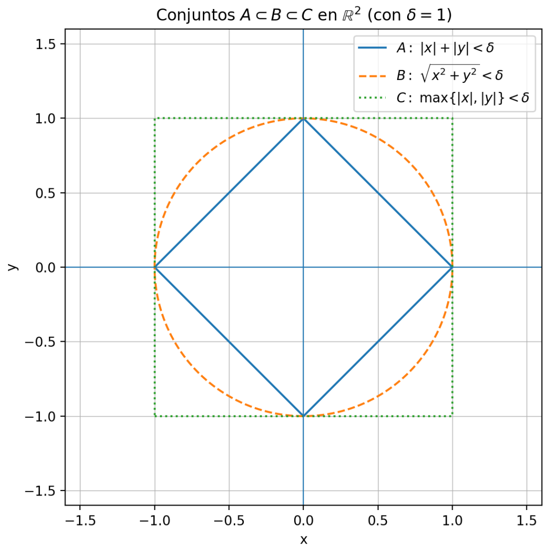

Figura 1: Conjuntos A, B, y C para $\delta = 1$ del Ejercicio 18.

Por tanto,

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| < \delta,$$

lo que implica $(x, y) \in B$. Concluimos que $A \subset B$.

(2) Demostración de $B \subset C$. Sea $(x, y) \in B$. Entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Como $x^2 \leq x^2 + y^2$ y $y^2 \leq x^2 + y^2$, se tiene

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \qquad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

En particular,

$$\text{máx}\{|x|, |y|\} < \delta,$$

luego $(x, y) \in C$. Concluimos que $B \subset C$.

Juntando (1) y (2), obtenemos

$$A \subset B \subset C.$$

. . . .

Ejercicio 19. (Álgebra de conjuntos) Sea

$$A = (0, 2], \qquad B = [-1, 1].$$

(a) Calcular y describir los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$.
(b) Demostrar que $A \times B \neq B \times A$.
Solución:

(a) Cálculo de los productos cartesianos.
Por definición,

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Sustituyendo los conjuntos dados:

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Análogamente,

$$B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B,\ y \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 < y \leq 2\}.$$

(b) Demostración de que $A \times B \neq B \times A$.
Basta encontrar un punto que pertenezca a uno de los conjuntos pero no al otro.
Por ejemplo, consideremos el punto $(2, 0)$.

$$(2, 0) \in A \times B \quad \text{porque} \quad 2 \in A \text{ y } 0 \in B.$$

Sin embargo,

$$(2, 0) \notin B \times A \quad \text{porque} \quad 2 \notin B.$$

Por tanto,

$$A \times B \neq B \times A.$$

Geométricamente, $A \times B$ es un rectángulo horizontal, mientras que $B \times A$ es un rectángulo vertical, obteniéndose uno a partir del otro por simetría respecto de la recta $y = x$.

. . . .

Ejercicio 20. (Álgebra de conjuntos) Demostrar que, para cualesquiera conjuntos A y B, se cumple

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Solución: Recordamos que la diferencia simétrica se define como

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Demostraremos la igualdad razonando elemento a elemento.

(1) Demostración de $A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Sea $x \in A \triangle B$. Entonces

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

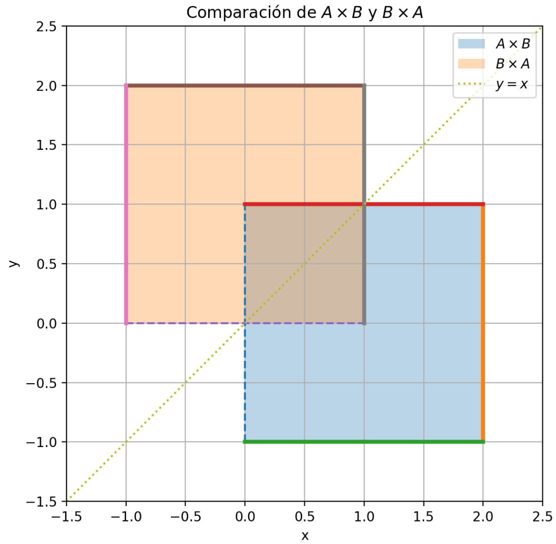

Figura 2: Producto cartesiano del Ejercicio 19. Los lados continuos pertenecen al conjunto, mientras que el lado discontinuo, no.

Por tanto, se cumple al menos una de las dos posibilidades:

(i) $x \in A \setminus B$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$. En particular, $x \in A \cup B$. Además, como $x \notin B$, no puede ocurrir que $x \in A \cap B$. Luego $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(ii) $x \in B \setminus A$. Entonces $x \in B$ y $x \notin A$. En particular, $x \in A \cup B$. Además, como $x \notin A$, no puede ocurrir que $x \in A \cap B$. Luego $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

En ambos casos, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, así que

$$A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(2) Demostración de $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \triangle B$.
Sea $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Entonces

$$x \in A \cup B \qquad \text{y} \qquad x \notin A \cap B.$$

La primera condición dice que $x \in A$ o $x \in B$. La segunda condición dice que *no* se cumple que $x \in A$ y $x \in B$ a la vez.
Por tanto, ocurren exactamente una de las dos posibilidades:

(i) $x \in A$ *y* $x \notin B$. Entonces $x \in A \setminus B$, luego $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$.

(ii) $x \in B$ *y* $x \notin A$. Entonces $x \in B \setminus A$, luego $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$.

En ambos casos, $x \in A \triangle B$, y por tanto

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \triangle B.$$

Como se cumplen ambas inclusiones, concluimos que

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

. . . .

Ejercicio 21. (Álgebra de conjuntos) Demostrar que, para cualesquiera conjuntos A y B, se cumple

$$A \setminus B \;=\; A \triangle (A \cap B).$$

Solución: Recordamos que la diferencia simétrica se define como

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Tomamos $X = A$ e $Y = A \cap B$:

$$A \triangle (A \cap B) = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup \big((A \cap B) \setminus A\big).$$

(1) Simplificación de $(A \cap B) \setminus A$.
Sea $x \in (A \cap B) \setminus A$. Entonces $x \in A \cap B$ y $x \notin A$. Pero $x \in A \cap B$ implica en particular $x \in A$, contradicción. Por tanto,

$$(A \cap B) \setminus A = \varnothing.$$

(2) Simplificación de $A \setminus (A \cap B)$.
Sea $x \in A \setminus (A \cap B)$. Entonces $x \in A$ y $x \notin A \cap B$. Como $x \in A$, la condición $x \notin A \cap B$ equivale a $x \notin B$. Por tanto,

$$x \in A \text{ y } x \notin B,$$

es decir,

$$x \in A \setminus B.$$

Esto demuestra que

$$A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B.$$

Recíprocamente, sea $x \in A \setminus B$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$. En particular, $x \notin A \cap B$, luego $x \in A \setminus (A \cap B)$. Por tanto,

$$A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B).$$

Concluimos que

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B.$$

(3) Conclusión.
Sustituyendo (1) y (2) en la expresión de $A \triangle (A \cap B)$:

$$A \triangle (A \cap B) = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup \varnothing = A \setminus (A \cap B) = A \setminus B.$$

Por tanto,
$$A \setminus B \;=\; A\triangle(A\cap B).$$

....

Ejercicio 22. (Álgebra de conjuntos) Demostrar que, para cualesquiera conjuntos A, B, C, D, se cumple
$$(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D).$$

Solución: Demostraremos la igualdad probando ambas inclusiones.

(1) Demostración de $(A\cap B)\times(C\cap D) \subseteq (A\times C)\cap(B\times D)$.
Sea $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$. Por definición de producto cartesiano,
$$x\in A\cap B \qquad \text{y} \qquad y\in C\cap D.$$
Por definición de intersección,
$$x\in A \text{ y } x\in B, \qquad y\in C \text{ y } y\in D.$$
Por tanto,
$$(x,y)\in A\times C \qquad \text{y} \qquad (x,y)\in B\times D,$$
lo que implica
$$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D).$$
Concluimos que
$$(A\cap B)\times(C\cap D) \subseteq (A\times C)\cap(B\times D).$$

(2) Demostración de $(A\times C)\cap(B\times D) \subseteq (A\cap B)\times(C\cap D)$.
Sea $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$. Entonces,
$$(x,y)\in A\times C \qquad \text{y} \qquad (x,y)\in B\times D.$$
Por definición de producto cartesiano,
$$x\in A \text{ y } y\in C, \qquad x\in B \text{ y } y\in D.$$
De nuevo, agrupando,
$$x\in A\cap B \qquad \text{y} \qquad y\in C\cap D.$$
Por tanto,
$$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D).$$
Concluimos que
$$(A\times C)\cap(B\times D) \subseteq (A\cap B)\times(C\cap D).$$

Como se cumplen ambas inclusiones, obtenemos la igualdad
$$(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D).$$

. . . .

Ejercicio 23. **(Álgebra de conjuntos) Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que:**

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \qquad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Es decir, el producto cartesiano es distributivo con respecto a la unión.
Solución:

(1) Demostración de $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
Demostramos ambas inclusiones.

(i) $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. Sea $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Entonces

$$x \in A \cup B \qquad \text{y} \qquad y \in C.$$

De $x \in A \cup B$ se sigue que $x \in A$ o $x \in B$.

- Si $x \in A$ y $y \in C$, entonces $(x, y) \in A \times C$.
- Si $x \in B$ y $y \in C$, entonces $(x, y) \in B \times C$.

En ambos casos,

$$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C).$$

Luego

$$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C).$$

(ii) $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$. Sea $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Entonces

$$(x, y) \in A \times C \quad \text{o} \quad (x, y) \in B \times C.$$

Si $(x, y) \in A \times C$, entonces $x \in A$ y $y \in C$, luego $x \in A \cup B$ y $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Si $(x, y) \in B \times C$, entonces $x \in B$ y $y \in C$, luego $x \in A \cup B$ y $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Por tanto,

$$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C.$$

Como se cumplen ambas inclusiones, queda probada la igualdad.

(2) Demostración de $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
De nuevo probamos ambas inclusiones.

(i) $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$. Sea $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Entonces

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad y \in B \cup C.$$

De $y \in B \cup C$ se sigue que $y \in B$ o $y \in C$.

- Si $y \in B$ y $x \in A$, entonces $(x, y) \in A \times B$.

- Si $y \in C$ y $x \in A$, entonces $(x, y) \in A \times C$.

En ambos casos,
$$(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C),$$
luego
$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C).$$

(ii) $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$. Sea $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Entonces
$$(x, y) \in A \times B \quad \text{o} \quad (x, y) \in A \times C.$$

Si $(x, y) \in A \times B$, entonces $x \in A$ y $y \in B$, luego $y \in B \cup C$ y $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Si $(x, y) \in A \times C$, entonces $x \in A$ y $y \in C$, luego $y \in B \cup C$ y $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Por tanto,
$$(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C).$$

Como se cumplen ambas inclusiones, queda probada la igualdad.

....

Ejercicio 24. (Álgebra de conjuntos) Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que:
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C), \qquad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Es decir, el producto cartesiano es distributivo con respecto a la intersección.
Solución:

(1) Demostración de $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
Demostramos ambas inclusiones.

(i) $(A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C)$. Sea $(x, y) \in (A \cap B) \times C$. Entonces
$$x \in A \cap B \qquad \text{y} \qquad y \in C.$$

De $x \in A \cap B$ se sigue que $x \in A$ y $x \in B$. Por tanto,
$$(x, y) \in A \times C \qquad \text{y} \qquad (x, y) \in B \times C,$$
lo que implica
$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C).$$
Luego
$$(A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C).$$

(ii) $(A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C$. Sea $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$. Entonces
$$(x, y) \in A \times C \qquad \text{y} \qquad (x, y) \in B \times C.$$

Por definición de producto cartesiano,

$$x \in A,\ y \in C \qquad \text{y} \qquad x \in B,\ y \in C.$$

En particular, $x \in A$ y $x \in B$, es decir, $x \in A \cap B$, y además $y \in C$. Por tanto,

$$(x, y) \in (A \cap B) \times C.$$

Luego

$$(A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C.$$

Como se cumplen ambas inclusiones, queda probada la igualdad.

(2) Demostración de $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
De nuevo, probamos ambas inclusiones.

(i) $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$. Sea $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Entonces

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad y \in B \cap C.$$

De $y \in B \cap C$ se sigue que $y \in B$ y $y \in C$. Por tanto,

$$(x, y) \in A \times B \qquad \text{y} \qquad (x, y) \in A \times C,$$

luego

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C).$$

Así,

$$A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C).$$

(ii) $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$. Sea $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Entonces

$$(x, y) \in A \times B \qquad \text{y} \qquad (x, y) \in A \times C.$$

Por definición de producto cartesiano,

$$x \in A,\ y \in B \qquad \text{y} \qquad x \in A,\ y \in C.$$

En particular, $x \in A$ y $y \in B \cap C$. Por tanto,

$$(x, y) \in A \times (B \cap C).$$

Luego

$$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C).$$

Como se cumplen ambas inclusiones, queda probada la igualdad.

....

Ejercicio 25. (Álgebra de conjuntos) Sean A, B, C conjuntos. Demostrar que:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C), \qquad A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Es decir, el producto cartesiano es distributivo con respecto a la diferencia.
Solución:

(1) Demostración de $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
Demostramos ambas inclusiones.

(i) $(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C)$. Sea $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$. Entonces

$$x \in A \setminus B \qquad \text{y} \qquad y \in C.$$

Por definición de diferencia,

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad x \notin B.$$

Luego $(x, y) \in A \times C$. Además, como $x \notin B$ (y $y \in C$), se tiene

$$(x, y) \notin B \times C.$$

Por tanto,

$$(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Así,

$$(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C).$$

(ii) $(A \times C) \setminus (B \times C) \subseteq (A \setminus B) \times C$. Sea $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$. Entonces

$$(x, y) \in A \times C \qquad \text{y} \qquad (x, y) \notin B \times C.$$

La primera condición implica

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad y \in C.$$

La segunda condición significa que *no* se cumple $x \in B$ y $y \in C$ a la vez. Pero ya sabemos que $y \in C$, así que necesariamente

$$x \notin B.$$

Por tanto, $x \in A \setminus B$ y $y \in C$, luego

$$(x, y) \in (A \setminus B) \times C.$$

Así,

$$(A \times C) \setminus (B \times C) \subseteq (A \setminus B) \times C.$$

Como se cumplen ambas inclusiones, queda probada la igualdad.

(2) Demostración de $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
De nuevo, probamos ambas inclusiones.

(i) $A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$. Sea $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$. Entonces

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad y \in B \setminus C.$$

Por definición de diferencia,

$$y \in B \qquad \text{y} \qquad y \notin C.$$

Luego $(x,y) \in A \times B$. Además, como $y \notin C$ (y $x \in A$), se tiene

$$(x,y) \notin A \times C.$$

Por tanto,

$$(x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Así,

$$A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C).$$

(ii) $(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$. Sea $(x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. Entonces

$$(x,y) \in A \times B \qquad \text{y} \qquad (x,y) \notin A \times C.$$

La primera condición implica

$$x \in A \qquad \text{y} \qquad y \in B.$$

La segunda condición significa que *no* se cumple $x \in A$ y $y \in C$ a la vez. Pero ya sabemos que $x \in A$, así que necesariamente

$$y \notin C.$$

Por tanto, $y \in B \setminus C$ y $x \in A$, luego

$$(x,y) \in A \times (B \setminus C).$$

Así,

$$(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C).$$

Como se cumplen ambas inclusiones, queda probada la igualdad.

. . . .

Ejercicio 26. (Álgebra de conjuntos) Sean A, B, C, D conjuntos, desarrollar

$$(A \cup B) \times (C \cup D)$$

como unión de productos cartesianos.

Solución: Aplicamos $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$ con $X = (A \cup B)$, $Y = C$ y $Z = D$:

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = \big((A \cup B) \times C\big) \cup \big((A \cup B) \times D\big).$$

Ahora aplicamos $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$ a cada término:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \qquad (A \cup B) \times D = (A \times D) \cup (B \times D).$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D).$$

. . . .

Ejercicio 27. (Álgebra de conjuntos)
(a) Demostrar que una de las dos fórmulas siguientes es siempre correcta y la otra algunas veces es falsa:

$$\text{(i)} \quad A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C, \qquad \text{(ii)} \quad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

(b) Establecer una condición necesaria y suficiente adicional para que la fórmula incorrecta sea siempre válida.
Solución:

(a) Análisis de (i). Mostramos que

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$$

no es válida en general. Por ejemplo, si

$$A = \varnothing, \qquad B = \varnothing, \qquad C = \{0\},$$

entonces

$$A \setminus (B \setminus C) = \varnothing \setminus \varnothing = \varnothing,$$

mientras que

$$(A \setminus B) \cup C = \varnothing \cup \{0\} = \{0\}.$$

Luego la igualdad no se cumple, y (i) es a veces falsa.

(a) Análisis de (ii). Demostramos que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

es siempre correcta.
Sea x un elemento arbitrario. Entonces:

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \text{ y } x \notin (B \cup C) && \text{(def. de diferencia)}\\
&\iff x \in A \text{ y } (x \notin B \text{ y } x \notin C) && \text{(def. de unión)}\\
&\iff (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ y } x \notin C && \\
&\iff x \in A \setminus B \text{ y } x \notin C && \text{(def. de diferencia)}\\
&\iff x \in (A \setminus B) \setminus C. && \text{(def. de diferencia)}
\end{aligned}$$

Por tanto, (ii) es válida para cualesquiera conjuntos A, B, C.

(b) Condición necesaria y suficiente para que (i) sea válida.
Simplificamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
A \setminus (B \setminus C) &= A \cap (B \setminus C)^c && \text{(def. de diferencia)}\\
&= A \cap (B \cap C^c)^c && \text{(def. de diferencia)}\\
&= A \cap (B^c \cup C) && \text{(leyes de De Morgan)}\\
&= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) && \text{(distributividad)}\\
&= (A \setminus B) \cup (A \cap C). && \text{(def. de diferencia)}
\end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad (i) equivale a

$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup C.$$

Esta igualdad se cumple si y solo si

$$C \subseteq A.$$