

Tema 0 – Repaso de Señales y Sistemas Discretos

4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Lecturas complementarias

- Opp. 1, Pro 1(sólo hasta 1.2): Introducción a TDS
 - Importancia de TDS en la ingeniería
 - Perspectiva histórica
 - Esquema de un sistema de TDS
 - Tipos de señales
- Transparencias:11-21



Lecturas complementarias

- Oppenheim, Willsky. Señales y Sistemas. Prentice-Hall, 1997. Cap. 1, cap. 2 (sólo lo referente a tiempo discreto)



Ejercicios Opp: 2.29, 2.43

Ejercicios Pro: 2.1, 2.2

Señales

- Señal: Algo que lleva info.
- Info contenida en algún patrón de variaciones (ej: voz, vídeo): $x(t)$.
- Convención: variable indep. es t .
- Señales en tiempo discreto
 $x[n]$:secuencias.

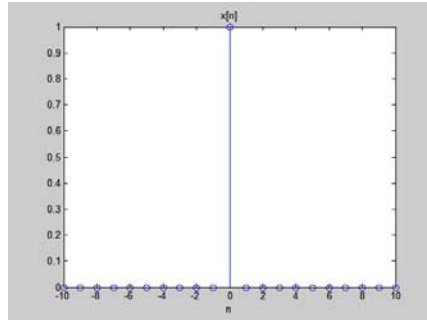
Señales Básicas

Delta de Kronecker

$$(0.1) \delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad \delta[n - n_0] = \begin{cases} 0 & n \neq n_0 \\ 1 & n = n_0 \end{cases}$$

$$(0.2) x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$$

$$(0.3) x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$



Cualquier secuencia se puede expresar como una suma ponderada de deltas

$$(0.4) \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n - k]$$
$$x_k = x[n = k]$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

5

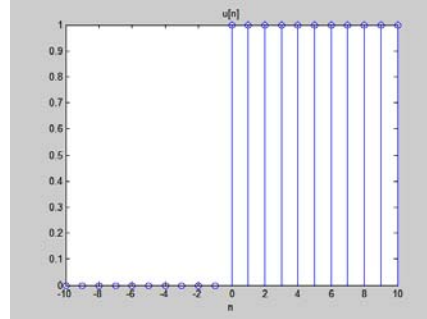
Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1

Señales Básicas

Escalón unidad

$$(0.5) \quad u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 0 & n < n_0 \\ 1 & n \geq n_0 \end{cases}$$



Relación con la función delta

$$(0.6) \quad u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$(0.7) \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

6

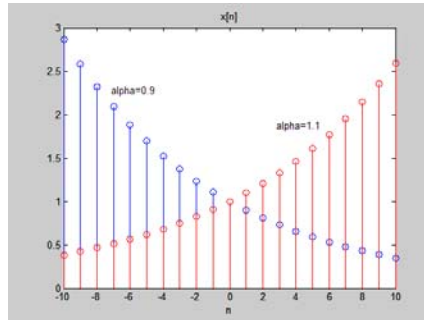
Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1

Ejercicios Pro: 2.3

Señales Básicas

Exponencial real

$$(0.9) \quad x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n}$$



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

7

Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3
Ejercicios Pro: 2.15*

Señales Básicas

Exponencial imaginaria pura

$$(0.10) x[n] = Ce^{j\omega_0 n} = C(\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n)$$

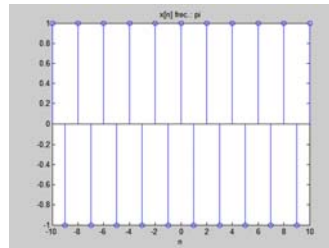
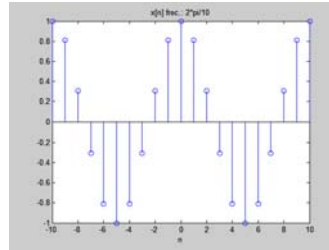
$$(0.11) \cos \omega_0 n = \operatorname{Re}\{e^{j\omega_0 n}\} = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

$$(0.12) \sin \omega_0 n = \operatorname{Im}\{e^{j\omega_0 n}\} = \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j}$$

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \quad (0.13)$$

$$|e^{j\omega_0 n}|^2 = 1 \quad (0.14)$$

$$(0.15) \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

8

Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3

Señales Básicas

Exponencial imaginaria pura

Periodicidad en n

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \omega_0 = 2\pi \frac{m}{N} \in [0, 2\pi) \approx (-\pi, \pi] \quad (0.16)$$

$$N_0 = \frac{N}{\gcd(m, N)} \quad (0.17)$$

$$e^{j\omega_1 n} + e^{j\omega_2 n} \longrightarrow N_{1+2} = \text{mcm}(N_1, N_2) \quad (0.18)$$

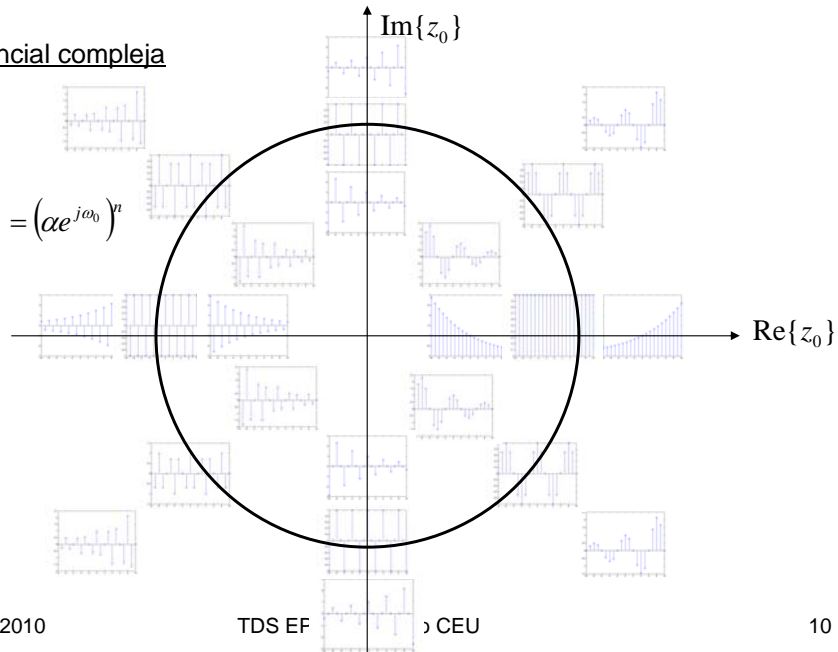
$$\text{Periodicidad en } \omega \quad \omega_1 = 2\pi k + \omega_2 \Rightarrow e^{j\omega_1 n} = e^{j\omega_2 n} \quad \omega_0 \in [0, 2\pi) \approx (-\pi, \pi]$$

Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3
Ejercicios Opp: 2.28

Señales Básicas

Exponencial compleja

$$x[n] = (z_0)^n = (\alpha e^{j\omega_0})^n$$



Curso 2009/2010

TDS EF

CEU

10

Bibliografía: Opp. 2.1, Pro. 2.1, Opp I 1.3

Ejercicios Opp: 2.7

Sistemas Básicos

(0.27)	Integrador	$y[n] = I(x[n]) = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$	} $x[n] = D_-^{-1}(I(x[n]))$ (0.33)
(0.28)	Diferencia finita causal	$y[n] = D_-^{-1}(x[n]) = x[n] - x[n-1]$	
(0.29)	Diferencia finita no causal	$y[n] = D_+^{-1}(x[n]) = x[n] - x[n+1]$	
(0.30)	Parte par	$x_e[n] = Ev(x[n]) = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$	} $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$ (0.35)
(0.31)	Parte impar	$x_o[n] = Odd(x[n]) = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$	
(0.32)	Correlación	$\phi_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n+m] = x[-m] * y[m]$	

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

11

Ejercicios Pro: 2.4, 2.5, 2.58, 2.59, 2.60, 2.61

Propiedades Básicas de los Sistemas

(0.19)	Sistemas con memoria	$y[n] = T(x[n], x[n-1], x[n-2], \dots)$
(0.20)	Sistemas sin memoria	$y[n] = T(x[n])$
(0.21)	Sistemas invertibles	$y[n] = T(x[n]) \Rightarrow \exists T^{-1}(y) : x[n] = T^{-1}(y[n]) = T^{-1}(T(x[n]))$
(0.22)	Sistemas causales	$y[n] = T(x[n], x[n-1], x[n-2], \dots)$
(0.23)	Sistemas no causales	$y[n] = T(x[n], x[n+1], x[n+2], \dots)$
(0.24)	Sistemas estables	$ x[n] < B_x, \forall n \Rightarrow \exists B_T : T(x[n]) < B_T, \forall n$
(0.25)	Sistemas invariantes en el tiempo	$y[n] = T(x[n]) \Rightarrow y[n - n_0] = T(x[n - n_0])$
(0.26)	Sistemas lineales	$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n])$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

12

Bibliografía: Opp. 2.2, Pro. 2.2

Ejercicios Opp: 2.23*, 2.30*, 2.55, 2.56, 2.62, 2.63, 2.68

Ejercicios Pro: 2.6, 2.7, 2.8*, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14

Sistemas LTI

(0.36)

Sistema

$$y[n] = T(x[n])$$

(0.37)

Sistema lineal

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

(0.38)

Sistema LTI

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Applet convolución discreta: <http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html>

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

13

Bibliografía: Opp. 2.3, Pro. 2.3

Suma de convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- Evaluación directa/gráfica (secuencias finitas):
 - Reflexión: $h[-k]$
 - Para cada n :
 - Desplazamiento: $h[n_0-k]$:
 - $n > 0$: derecha
 - $n < 0$: izquierda.
 - Multiplicación: $v_{n_0} = x[k] \cdot h[n_0-k]$
 - Suma de todos los productos.
- Evaluación analítica: Ejemplo: $y[n] = u[n] * \alpha^n u[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u[n]$

Opp:2.3

Ejercicios Opp: 2.2, 2.3, 2.22, 2.24

Ejercicios Pro: 2.16*, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.29, 2.31*, 2.32, 2.33, 2.34, 2.36, 2.37, 2.38, 2.39, 2.45, 2.51, 2.52 2.63, 2.64

Propiedades Sistemas LTI

(0.39)	Conmutatividad	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
(0.40)	Distributividad	$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
(0.41)	Asociatividad	$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$
(0.42)	Sistemas sin memoria	$h[n] = k\delta[n]$
(0.43)	Sistemas invertibles	$h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n]$
(0.44)	Sistemas causales	$h[n] = 0 \quad \forall n < 0$
(0.45)	Sistemas estables	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] < \infty$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

15

Bibliografía: Opp. 2.4, Pro. 2.3

Ejercicios Opp: 2.1*, 2.10, 2.12, 2.15, 2.18, 2.19, 2.21*, 2.25, 2.35, 2.36, 2.37*, 2.50, 2.60, 2.34*.

Ejercicios Pro: 2.24, 2.35*, 2.40, 2.56, 2.57

Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias finitas

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (0.48)$$

- Método 1: Ecuación de recurrencia

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right) \quad (0.49)$$

- Método 2: Sol. Homogénea+Sol. Particular

$$\underbrace{\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0 \quad \sum_{k=0}^N a_k y_p[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]}_{y[n] = y_h[n] + y_p[n]} \quad (0.50)$$

Bibliografía: Opp. 2.5, Pro 2.4
Ejercicios Opp: 2.39, 2.61

Sol. Ecuación Homogénea

Ejemplo: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

$$y_h[n] - \frac{3}{4}y_h[n-1] + \frac{1}{8}y_h[n-2] = 0$$

$$y_h[n] = z^n$$

$$z^n - \frac{3}{4}z^{n-1} + \frac{1}{8}z^{n-2} = z^{n-2} \left(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} \right) = z^{n-2} \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right) = 0$$

Polinomio característico

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{Sol. Trivial} \\ z = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Si hay raíces múltiples, supongamos que $\frac{1}{4}$ es de orden 2, entonces la solución es de la forma

$$y_h[n] = K_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + K_2 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$y_h[n] = K_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + (K_2 + nK_3) \left(\frac{1}{4} \right)^n \quad (0.51)$$

Bibliografía: Opp. 2.5, Pro. 2.4

Ejercicios Opp: 2.38

Sol. Particular

Ejemplo: $y_p[n] - \frac{3}{4}y_p[n-1] + \frac{1}{8}y_p[n-2] = x[n] + x[n-1]$

$$x[n] = u[n]$$

$$y_p[n] = Ku[n]$$

$$y_p[n] - \frac{3}{4}y_p[n-1] + \frac{1}{8}y_p[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

$$Ku[n] - \frac{3}{4}Ku[n-1] + \frac{1}{8}Ku[n-2] = u[n] + u[n-1]$$

$$n = 2$$

$$K - \frac{3}{4}K + \frac{1}{8}K = 1 + 1 \Rightarrow K = \frac{16}{3}$$

$$y_p[n] = \frac{16}{3}u[n]$$

$x[n]$	$y[n]$
K	K'
$KM^n n^p$	$M^n (K_0 n^p + K_1 n^{p-1} + \dots + K_p)$
$K \cos \omega_0 n$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$
$K \sin \omega_0 n$	

(0.52)

Bibliografía: Pro. 2.4

Ejercicios Pro: 2

Solución Ecuación en Diferencias

Ejemplo: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

$$y_h[n] = K_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y_p[n] = \frac{16}{3}u[n]$$

$$y[n] = \left(K_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{16}{3}\right)u[n]$$

$$n=0 \quad y[0] = \frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] + x[0] + x[-1] = 1 = K_1 + K_2 + \frac{16}{3}$$

$$n=1 \quad y[1] = \frac{3}{4}y[0] - \frac{1}{8}y[-1] + x[1] + x[0] = \frac{11}{4} = K_1\frac{1}{2} + K_2\frac{1}{4} + \frac{16}{3}$$

$$K_1 = -6, K_2 = -\frac{5}{3}$$

$$y[n] = \left(-6\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{16}{3}\right)u[n]$$

Bibliografía: Pro. 2.4

Ejercicios Opp: 2.5*, 2.16

Ejercicios Pro: 2.27, 2.54

Sol. Ecuación de recurrencia

Ejemplo:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \longrightarrow y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

Condiciones iniciales: $y[n] = 0 \quad n < 0$

$$n=-2 \quad y[-2] = x[-2] + \frac{1}{2}y[-3] = 0$$

$$n=-1 \quad y[-1] = x[-1] + \frac{1}{2}y[-2] = 0$$

$$n=0 \quad y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = 1$$

$$n=1 \quad y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \quad y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

...

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

20

Bibliografía: Opp. 2.5, Pro 2.4

Ejercicios Opp: 2.4

Ejercicios Pro: 2.23, 2.42

Respuesta al impulso

Ejemplo: $y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$

$$y_h[n] = (K_1(-1)^n + K_2(4)^n)$$

$$n=0 \quad y[0] = 3y[-1] + 4y[-2] + x[0] + 2x[-1] = 1 = K_1 + K_2$$

$$n=1 \quad y[1] = 3y[0] + 4y[-1] + x[1] + 2x[0] = 5 = -K_1 + 4K_2$$

$$K_1 = -\frac{1}{5}, K_2 = \frac{6}{5}$$

$$h[n] = \left(-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}4^n\right)\mu[n]$$

Bibliografía: Pro. 2.4.4

Ejercicios Opp: 2.20, 2.31*

Ejercicios Pro: 2.25, 2.28, 2.30, 2.55

Funciones propias de los sistemas LTI

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_0^k h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{n-k} = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{-k} = z_0^n H(z_0)$$

$$x[n] = z_0^n = r^n e^{j\omega n} \quad (0.46)$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n \quad (0.47)$$

Bibliografía: Opp. 2.6

Ejercicios Opp: 2.13*, 2.14*, 2.26, 2.27

Representación en Serie de Fourier

$$x[n] = x[n + N] \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (0.53)$$

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{Pero sólo hay } N \text{ señales distintas de este tipo} \quad (0.54)$$

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \quad (0.55)$$

$$(0.56) \quad x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi_k[n] \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \phi_{-k}[n] \quad (0.57)$$

Atención:
$$\begin{cases} a_{k+N} = a_k \\ a_{-k} = a_{N-k} \end{cases} \quad (0.58)$$

La frecuencia de la exponencial correspondiente al coeficiente a_k es $\omega_k = k\omega_0$

Applet: <http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html>
<http://www.jhu.edu/~signals/listen-new/listen-newindex.htm>

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

23

Bibliografía: Opp. 2.7, Opp 8.1, Pro. 4.2

i

Propiedades de la Serie de Fourier

Linealidad $Ax[n] + By[n] \longleftrightarrow Aa_k + Bb_k$ (0.59)

Desplazamiento en el tiempo $x[n - n_0] \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$ (0.60)

Desplazamiento en frecuencia $x[n] e^{jk_0 \omega_0 n} \longleftrightarrow a_{k - k_0}$ (0.61)

Conjugación $x^*[n] \longleftrightarrow a_{-k}^*$ (0.62)

Inversión en el tiempo $x[-n] \longleftrightarrow a_{-k}$ (0.63)

Escalado en el tiempo $x_M[n] = \begin{cases} x[n/M] & n = Mk \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longleftrightarrow \frac{1}{M} a_k$ (0.64)

Convolución periódica $\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r] \longleftrightarrow Na_k b_k$ (0.65)

Producto $x[n]y[n] \longleftrightarrow \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$ (0.66)

Applet: <http://www.jhu.edu/~signals/dtftprops/indexDTFTprops.htm>

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

24

Bibliografía: Opp. 2.8, Opp 2.9, Pro. 4.2

Propiedades de la Serie de Fourier

Diferencia finita $x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - e^{-j\omega_0})a_k$ (0.67)

“Integración” $\sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 k}} a_k$ (0.68)

Sólo es periódica y finita si $a_0 = 0$ (0.69)

Simetrías $x[n]$ es real $\longleftrightarrow a_k = a_{-k}^*$ (0.70)

$x[n]$ es real y par $\longleftrightarrow a_k$ es real y par (0.71)

$x[n]$ es real e impar $\longleftrightarrow a_k$ es imaginaria pura e impar (0.72)

$x_e[n] \longleftrightarrow \text{Re}\{a_k\}$ (0.73)

$x_o[n] \longleftrightarrow \text{Im}\{a_k\}$ (0.74)

Teorema de Parseval $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$ (0.75)

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

25

Bibliografía: Opp. 2.8, Opp 2.9, Pro. 4.2

Algunas series de Fourier

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi M}{N}n\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi M}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi M}{N}n}}{2j} \xleftrightarrow{\gcd(M, N)=1} a_M = \frac{1}{2j}, a_{-M} = -\frac{1}{2j} \quad (0.76)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi M}{N}n\right) \xleftrightarrow{\gcd(M, N)=1} a_M = \frac{1}{2}, a_{-M} = \frac{1}{2} \quad (0.77)$$

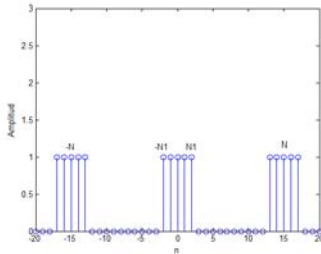
Ejemplo:

$$1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} \quad a_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} \quad a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Algunas series de Fourier

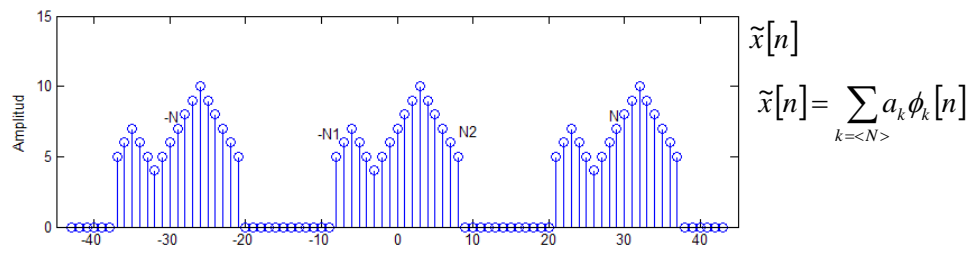
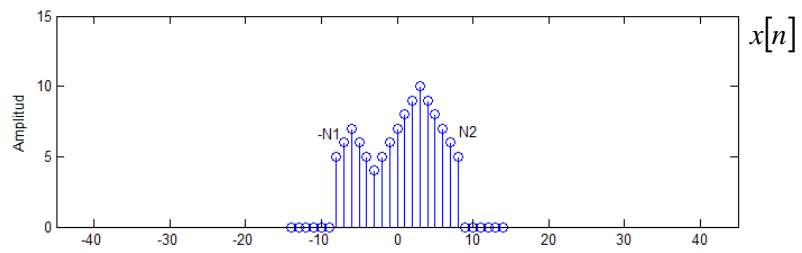


$$\longleftrightarrow a_k = \begin{cases} \frac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{N} k (2N_1+1))}{\sin(\frac{\pi}{N} k)} & \text{resto} \end{cases} \quad (0.78)$$

$$x[n] = K \longleftrightarrow a_k = \begin{cases} K & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (0.79)$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \longleftrightarrow a_k = \frac{1}{N} \quad \forall k \quad (0.80)$$

Transformada de Fourier



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

28

Bibliografía: Opp. 2.7, Pro 4.2

Transformada de Fourier

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-j\omega_k n}$$

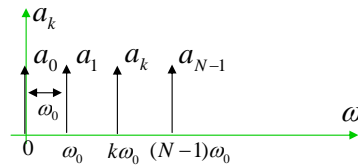
Defino $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ (0.81) Luego, $a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$

Para reconstruir la señal en el espacio del tiempo

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \phi_k[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (0.82)$$



Bibliografía: Opp. 2.7, Pro 4.2

Ejercicios Opp: 2.72, 2.74

Convergencia de la TF

$$\text{si } X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N}^N x[n]e^{-j\omega n} \quad (0.83)$$

$$\text{se define convergencia uniforme } \lim_{N \rightarrow \infty} |X(e^{j\omega}) - X_N(e^{j\omega})| = 0 \quad (0.84)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad \text{converge uniformemente si } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (0.85)$$

$$\text{señales de energía finita } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (0.86)$$

$$\text{convergencia cuadrática media } \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(2\pi)} |X(e^{j\omega}) - X_N(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0 \quad (0.87)$$

Convergencia de la TF

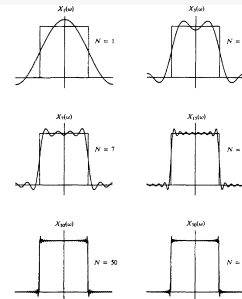
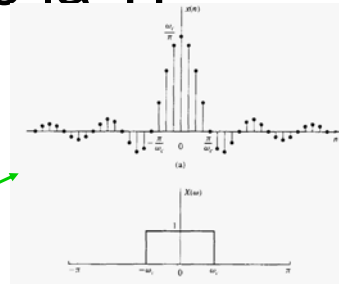
¡Pero para las señales de energía finita puede haber fenómenos de Gibbs en frecuencia!

Ejemplo:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad x[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}$$

pero

$$x[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} \quad X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} e^{-j\omega n}$$



La interpretación intuitiva es que $X_N(e^{j\omega})$ tiende a $X(e^{j\omega})$ salvo en un número finito de discontinuidades

Este hecho tendrá su importancia a la hora de diseñar filtros discretos.

TF de señales periódicas

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \quad (0.88)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n} &\longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) \\ &\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad -\pi \leq \omega < \pi \end{aligned}$$

En general

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (0.89)$$

Propiedades de la TF

(0.90)	Linealidad	$Ax[n] + By[n]$	\longleftrightarrow	$AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$
(0.91)	Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_0]$	\longleftrightarrow	$X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$
(0.92)	Desplazamiento en frecuencia	$x[n]e^{j\omega_0 n}$	\longleftrightarrow	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
(0.93)	Conjugación	$x^*[n]$	\longleftrightarrow	$X^*(e^{-j\omega})$
(0.94)	Inversión en el tiempo	$x[-n]$	\longleftrightarrow	$X(e^{-j\omega})$
(0.95)	Escalado en el tiempo	$x_m[n] = \begin{cases} x[n/m] & n = mk \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$	\longleftrightarrow	$X(e^{jm\omega})$
(0.96)	Convolución	$x[n] * y[n]$	\longleftrightarrow	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
(0.97)	Producto	$x[n]y[n]$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$

Bibliografía: Opp. 2.8, Pro. 4.3

Propiedades de la TF

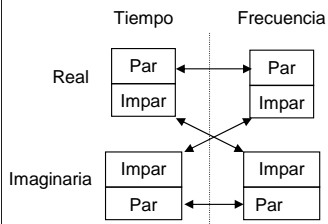
Diferencia finita $x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$ (0.98)

Integración $\sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$ (0.99)

$$+ \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$
 (0.100)

Diferenciación en frecuencia $nx[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ (0.101)

Simetrías



$x[n]$ es real $\longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (0.102)

$x[n]$ es real y par $\longleftrightarrow X(e^{j\omega})$ es real y par (0.103)

$x[n]$ es real e impar $\longleftrightarrow X(e^{j\omega})$ es imaginaria pura e impar (0.104)

$x_e[n] \longleftrightarrow \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ (0.105)

$x_o[n] \longleftrightarrow \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ (0.106)

Propiedades de la TF

Teorema de Parseval
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (0.107)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \quad (0.108)$$

Bibliografía: Opp. 2.8, Pro. 4.3

Ejercicios Opp: 2.44*, 2.49*, 2.65, 2.71, 2.73, 2.75, 2.76, 2.77, 2.78, 2.79

Algunas TFs

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{|a| < 1} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (0.109)$$

$$a^{|n|} \xleftrightarrow{|a| < 1} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2} \quad (0.110)$$

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{|a| < 1} \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)^2 \quad (0.111)$$

$$\binom{n+r-1}{r-1} a^n u[n] \xleftrightarrow{|a| < 1} \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)^r \quad (0.112)$$

$$\frac{\sin(\omega_p(n+1))}{\sin \omega_p} a^n u[n] \xleftrightarrow{|a| < 1} \frac{1}{1 - 2a \cos \omega_p e^{-j\omega} + a^2 e^{-2j\omega}} \quad (0.113)$$

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (0.114)$$

Bibliografía: Opp I 5.6

Algunas TFs

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (0.115)$$

$$\cos(\omega_0 n + \alpha) \longleftrightarrow \pi e^{j\alpha} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\alpha} \delta(\omega + \omega_0) \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (0.116)$$

$$\sin(\omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0) \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (0.117)$$

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (0.118)$$

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1 \quad (0.119)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega) \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (0.120)$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \xleftrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{N}} \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (0.121)$$

Algunas TFs

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longleftrightarrow \frac{\sin \omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \omega \frac{1}{2}} \quad (0.122)$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & -N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longleftrightarrow \frac{\sin \omega(\frac{1}{2}(N_1 + N_2 + 1))}{\sin \omega \frac{1}{2}} e^{-j\omega \frac{N_2 - N_1}{2}} \quad (0.123)$$

$$\frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{W}{\pi}n\right) \xleftrightarrow{0 < W < \pi} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (0.124)$$

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{nT} & n \neq 0 \end{cases} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = j\omega \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (0.125)$$

Algunas TFs

Ejemplo: $x[n] = a^n u[n-5] = a^5 a^{n-5} u[n-5]$ $\xleftrightarrow{|a| < 1}$ $\frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$

\uparrow

$a^n u[n]$ $\xleftrightarrow{|a| < 1}$ $\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$ (0.126)

$x[n - n_0]$ \longleftrightarrow $X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}$ (0.127)

Ejemplo: $\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} = \frac{a}{a-b} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{b}{a-b} \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}$

$$x[n] = \frac{a}{a-b} a^n u[n] - \frac{b}{a-b} b^n u[n]$$

Dualidad de la TF

	Tiempo continuo		Tiempo discreto	
	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Series de Fourier	Periódica en el tiempo. Tiempo continuo $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	No periódica en frecuencia. Frecuencia discreta $a_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	Periódica en el tiempo. Tiempo discreto $x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$	Periódica en frecuencia. Frecuencia discreta $a_k = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$
Transformada de Fourier	No periódica en el tiempo. Tiempo continuo $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	No periódica en frecuencia. Frecuencia continua $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	No periódica en el tiempo. Tiempo discreto $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	Periódica en frecuencia. Frecuencia continua $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

(0.128)

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

40

Bibliografía: Pro. 4.2, Opp I 5.7

Caracterización en frecuencia de un sistema LTI

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_0^k h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{n-k} = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{-k} = z_0^n H(z_0)$$

\uparrow
 $x[n] = z_0^n$

(0.46)

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

(0.47)

$$H(z_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{-k}$$

La respuesta en frecuencia a un sistema es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional

Caracterización en frecuencia de un sistema LTI

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow y[n] = e^{j\omega_0 n} * h[n] = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) \quad (0.131)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \longrightarrow y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (0.132)$$

Ejemplo: $x[n] = \cos(\omega_0 n + \alpha) = \frac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n}$

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + \frac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n} H(e^{-j\omega_0}) = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + \frac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n} H^*(e^{j\omega_0}) = \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \left(\frac{1}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} e^{j\angle H(e^{j\omega_0})} + \frac{1}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\angle H(e^{j\omega_0})} \right) = \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \alpha + \angle H(e^{j\omega_0})) \end{aligned}$$

Bibliografía: Opp. 2.6, Pro. 4.4

Ejercicios Opp: 2.6, 2.11*, 2.32, 2.33*, 2.41, 2.45, 2.48, 2.51, 2.52, 2.53, 2.54, 2.57, 2.69

Caracterización en frecuencia de un sistema definido por una ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longleftrightarrow \sum_{k=0}^N a_k Y(e^{j\omega}) e^{-jk\omega} = \sum_{k=0}^M b_k X(e^{j\omega}) e^{-jk\omega} \quad (0.129)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}} \quad (0.130)$$

Ejemplo: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{1}{8}Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} = 2X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right) = 2X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Bibliografía: Opp. 2.5, Pro. 4.4

Ejercicios Opp: 2.8*, 2.9, (2.34*), 2.42, 2.47, 2.64, 2.66, 2.67, 2.70

Régimen estacionario y transitorio

Ejemplo régimen estacionario:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow y[n] = e^{j\omega_0 n} * h[n] = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

Ejemplo régimen transitorio:

$$\begin{aligned} x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] &\longrightarrow y[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] * h[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] \left(\sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) = \\ &= e^{j\omega_0 n} u[n] \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) = \\ &= e^{j\omega_0 n} u[n] \left(\underbrace{H(e^{j\omega_0})}_{\text{Régimen estacionario (steady state)}} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}}_{\text{Régimen transitorio}} \right) = y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

44

Bibliografía: Pro. 4.4, Opp 2.6

Ejercicios Opp: 2.40

Ejercicios Pro: 2.9

Régimen estacionario y transitorio

Ejemplo régimen transitorio:

$$y_t[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}$$

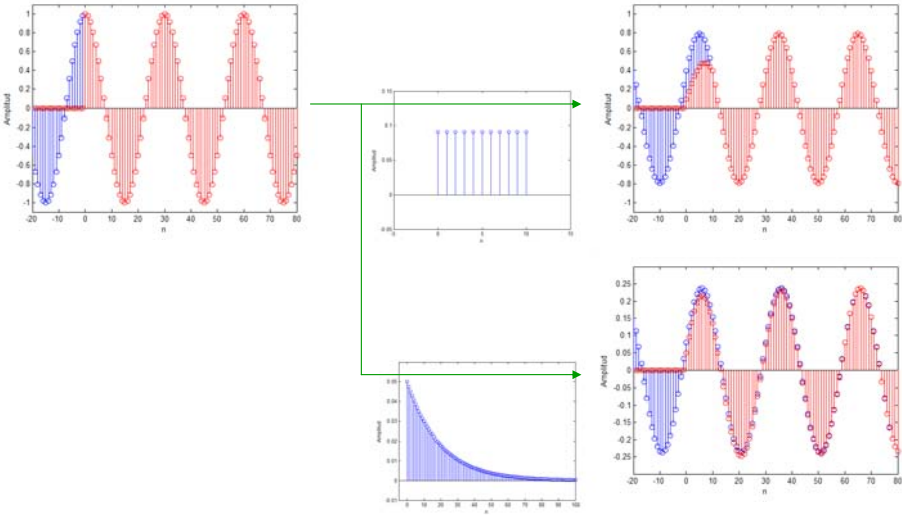
$$|y_t[n]| = \left| e^{j\omega_0 n} u[n] \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|$$

Si $h[n]$ es un sistema FIR, entonces $\exists n_0 |y_t[n]| = 0 \quad \forall n > n_0$

Si $h[n]$ es un sistema IIR, entonces

Es decir, la respuesta está acotada si el sistema es estable. Y el transitorio tiende a 0 si la respuesta al impulso tiende a 0 con n

Régimen estacionario y transitorio



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

46

Bibliografía: Pro. 4.4

Procesos estocásticos

Supondremos que cada $x[n]$ es el resultado de una variable aleatoria x_n con $p_{x_n}(x, n)$

A menudo es útil caracterizar una v.a. por promedios:

Media

$$m_{x_n} = E\{x_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{x_n}(x, n)dx$$

$$m_{x_n} = E\{x_n\} = \sum_x xp_{x_n}(x, n)$$

$$E\{x_n + y_m\} = E\{x_n\} + E\{y_m\}$$

$$E\{ax_n\} = aE\{x_n\}$$

Procesos estacionarios

$$m_{x_n} = m_x$$

$$\phi_{xx}[n, n+m] = \phi_{xx}[m]$$

$$\phi_{xy}[m] = \phi_{yx}[-m] \Rightarrow \phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$$

Correlación y Autocorrelación

$$\phi_{xx}[n, n+m] = E\{x_n, x_{n+m}\}$$

$$\phi_{xy}[n, n+m] = E\{x_n, y_{n+m}\}$$

Para una señal determinista

$$\phi_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m] = x[-m] * x[m]$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

47

Bibliografía: Opp. 2.10, Opp. A, Pro. 2.6, Pro. A
Ejercicios Opp: 2.59

Procesos estocásticos y Sistemas

LTI

$$E\{y[n]\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]E\{x[n-k]\} = E\{x[n]\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = E\{x[n]\}H(e^{j0}) \quad (0.139)$$

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[n, n+m] &= E\{y[n]y[n+m]\} \stackrel{\text{LTI}}{=} E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]h[r]x[n-k]x[n-r+m]\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]E\{x[n-k]x[n-r+m]\} \stackrel{\text{x estacionario}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\phi_{xx}[m+k-r] = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-l] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[l+k] = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-l]\phi_{hh}[l] = \phi_{xx}[m] * \phi_{hh}[m], \text{ luego y es también estacionaria} \end{aligned} \quad (0.140)$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

48

Bibliografía: Opp. 2.10, Opp. A, Pro. 2.6, Pro. A

Procesos estocásticos y Sistemas LTI

$$\phi_{hh}[m] = h[-m] * h[m] \Rightarrow \Phi_{hh}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$$

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}) \quad \Phi_{yy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega})$$

(0.141)

(0.142)

$$E\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega \quad (0.143)$$

$\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ es una función no negativa, real, y par (0.144)

Ejemplo: Si es un filtro paso banda

$$E\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_l}^{-\omega_h} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_l}^{\omega_h} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = 2 \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_l}^{\omega_h} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

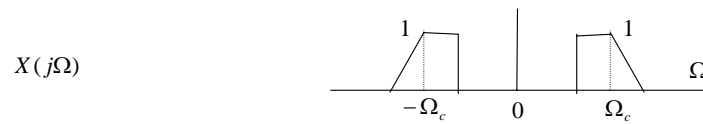
49

Bibliografía: Opp. 2.10, Opp. A, Pro. 2.6, Pro. A

Ejercicios Opp: 2.80*, 2.81*, 2.82, 2.83*, 2.84, 2.85, 2.86, 2.87, 2.88, 2.89, 2.90, 2.91

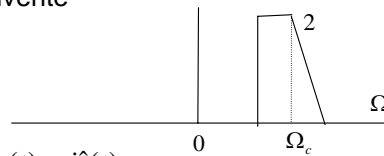
Ejercicios Pro: 2.62

Señales paso banda



Señal analítica o pre-envolvente

$$(0.145) X_+(j\Omega) = 2X(j\Omega)u(j\Omega)$$



$$(0.146) x_+(t) = (\delta(t) + j\frac{1}{\pi}) * x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

Transformada de Hilbert

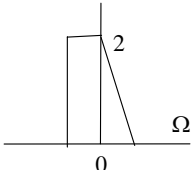
$$(0.147) \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} * x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} j & \Omega < 0 \\ 0 & \Omega = 0 \\ -j & \Omega > 0 \end{cases} \quad (0.149)$$

$$(0.148) \hat{X}(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$$

Señales paso banda

Señal equivalente paso bajo

$$(0.150) \quad X_l(j\Omega) = X_+(j(\Omega + \Omega_c))$$


$$(0.151) \quad X(j\Omega) = \frac{1}{2} X_l^*(-j(\Omega - \Omega_c)) + \frac{1}{2} X_l(j(\Omega - \Omega_c))$$

Componente en fase

Componente en cuadratura

$$(0.152) \quad x_l(t) = x_+(t)e^{j\Omega_c t} = x_c(t) + jx_s(t) = a(t)e^{j\theta(t)}$$

↑ Fase
↑ Envolvente

$$(0.153) \quad x(t) = x_c(t) \cos \Omega_c t - x_s(t) \sin \Omega_c t = a(t) \cos(\Omega_c t + \theta(t)) = \text{Re}\{x_l(t)e^{j\Omega_c t}\}$$

$$(0.154) \quad \hat{x}(t) = x_c(t) \cos \Omega_c t + x_s(t) \sin \Omega_c t = a(t) \sin(\Omega_c t + \theta(t)) = \text{Im}\{x_l(t)e^{j\Omega_c t}\}$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

51

Bibliografía: Pro. 9.1

Ejercicios Opp: 2.58

Ejercicios Pro: 9.3*

Apéndice I: Relaciones trigonométricas

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

$$\cos 2z = 1 - 2 \sin^2 z = 2 \cos^2 z - 1 = \frac{1 - \tan^2 z}{1 + \tan^2 z}$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z = \frac{2 \tan z}{1 + \tan^2 z}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a - b) + \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a - b) - \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a - b) + \frac{1}{2} \sin(a + b)$$

Bibliografía: Formulario CRC

Apéndice II: Partial Fraction Expansion

$$G(z) = \frac{b_{n-1}z^{-(n-1)} + b_{n-2}z^{-(n-2)} + \dots + b_1z^{-1} + b_0}{a_nz^{-n} + a_{n-1}z^{-(n-1)} + \dots + a_1z^{-1} + 1} =$$

$$= \frac{b_{n-1}z^{-(n-1)} + b_{n-2}z^{-(n-2)} + \dots + b_1z^{-1} + b_0}{(1-z_1z^{-1})^{m_1}(1-z_2z^{-1})^{m_2}\dots(1-z_pz^{-1})^{m_p}} = \sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^{m_p} \frac{K_{pm}}{(1-z_pz^{-1})^m}$$

donde

$$K_{pm} = \frac{1}{(m_p - m)!} (-z_p)^{-(m_p - m)} \frac{d^{(m_p - m)}}{dz^{-(m_p - m)}} \left((1 - z_p z^{-1})^{m_p} G(z) \right) \Big|_{z=z_p}$$

Bibliografía: Opp I Apéndice

Apéndice II: Partial Fraction Expansion

Ejemplo:
$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{K_{11}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{K_{21}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$K_{11} = \left. \left(\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) H(z) \right) \right|_{z=\frac{1}{2}} = \left. \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \right|_{z=\frac{1}{2}} = 4$$

$$K_{21} = \left. \left(\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) H(z) \right) \right|_{z=\frac{1}{4}} = \left. \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \right|_{z=\frac{1}{4}} = -2$$

$$H(z) = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Apéndice II: Partial Fraction Expansion

$$\text{Ejemplo: } Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} = \frac{K_{11}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \frac{K_{21}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} + \frac{K_{22}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$$K_{11} = \left. (1 - \frac{1}{2}z^{-1})H(z) \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 8$$

$$K_{22} = \left. (1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2 H(z) \right|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -2$$

$$K_{21} = \frac{1}{(2-1)!} \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} \left(\frac{d}{dz^{-1}} (1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2 H(z) \right) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -4 \left(\frac{d}{dz^{-1}} \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \right) \Big|_{z=\frac{1}{4}} =$$

$$= -4 \left(-\frac{2(-\frac{1}{2})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2} \right) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -4$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{8}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} - \frac{4}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$$y[n] = \left(8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \mu[n]$$

Apéndice II: Partial Fraction Expansion

Ejemplo:
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 3e^{-j\omega} + \frac{11}{6}e^{-j2\omega} + \frac{1}{3}e^{-j3\omega}}{1 + \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}} = c_0 + c_1e^{-j\omega} + \frac{d_0 + d_1e^{-j\omega}}{1 + \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

$$1 + 3e^{-j\omega} + \frac{11}{6}e^{-j2\omega} + \frac{1}{3}e^{-j3\omega} = (c_0 + d_0) + (\frac{5}{6}c_0 + c_1 + d_1)e^{-j\omega} + (\frac{1}{6}c_0 + \frac{5}{6}c_1)e^{-j2\omega} + \frac{1}{6}c_1e^{-j3\omega}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{6} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \frac{11}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + \frac{0 + \frac{1}{6}e^{-j\omega}}{1 + \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}} = 1 + 2e^{-j\omega} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right) u[n]$$

Apéndice III: Miscelánea

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$$

Textos

- Cohen2005: The history of noise

Tema 1 – Muestreo de señales continuas

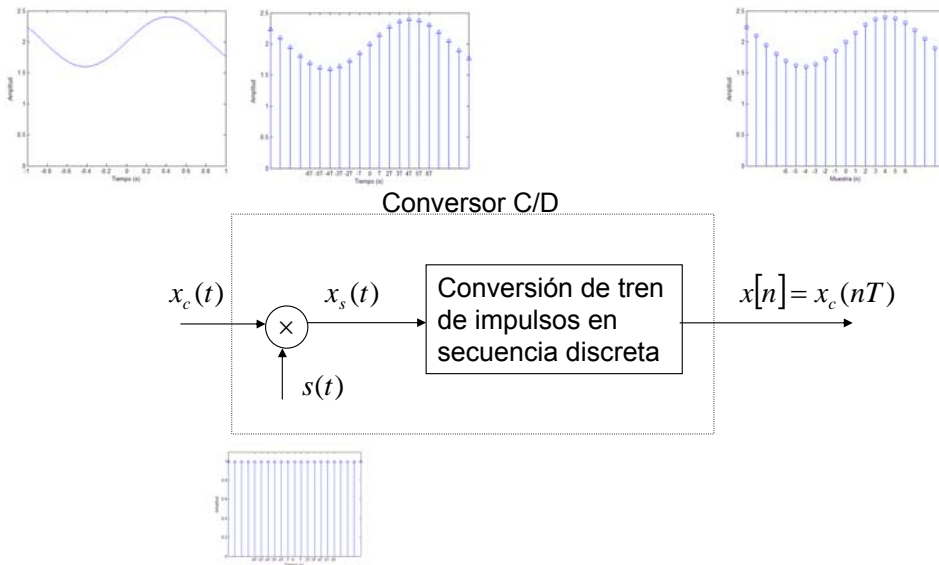
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Oppenheim II (Cap. 4). Proakis (Cap. 9). Oppenheim I (Cap. 7)

Introducción

- <http://www.youtube.com/watch?v=vbjRnnDofFo>
- <http://www.ieee.org/web/membership/IEE/Etv/about.html>
 - (Analog to digital traits)

Muestreo periódico



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

3

Bibliografía: Opp 4.1

Problemas Opp: 4.1

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia

Applet:

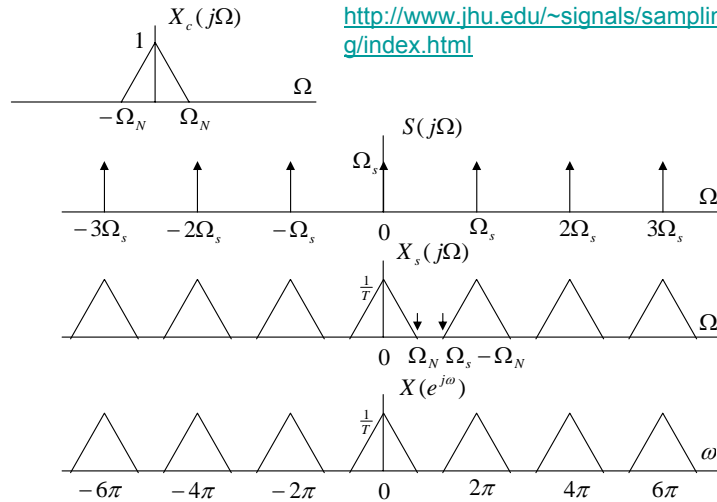
<http://www.jhu.edu/~signals/sampling/index.html>

$x_c(t)$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$x[n] = x_c(nT)$$



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

4

Bibliografía: Opp 4.2

Problemas Opp: 4.7*, 4.10, 4.11

Problemas Pro: 1.15, 9.6

Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia

$$x_c(t) \quad X_c(j\Omega)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad S(j\Omega) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (1.1)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) \quad X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT} \quad (1.2)$$

$$x[n] = x_c(nT) \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega n} \quad (1.3)$$

$$(1.4) \quad X(e^{j\Omega T}) = X_s(j\Omega)$$

$$(1.5) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}))$$

$$(1.6) \quad X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$\omega = \Omega T$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

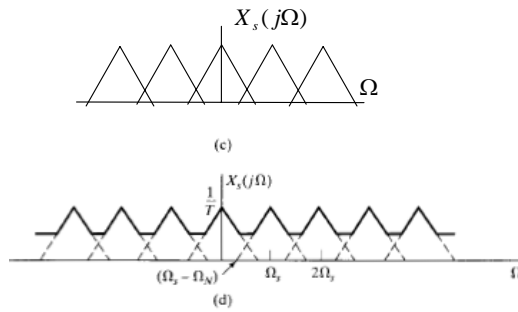
5

Bibliografía: Opp 4.2

Problemas Opp: 4.2*, 4.3*, 4.4*.

Aliasing

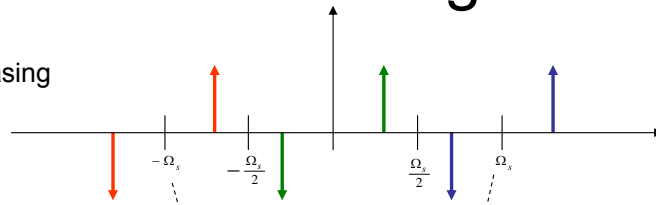
Se produce aliasing cuando $\Omega_N > \Omega_s - \Omega_N$ (1.7)



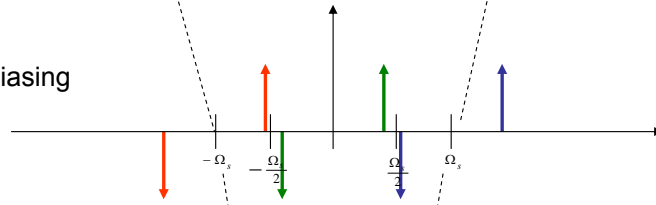
Bibliografía: Opp 4.2

Aliasing

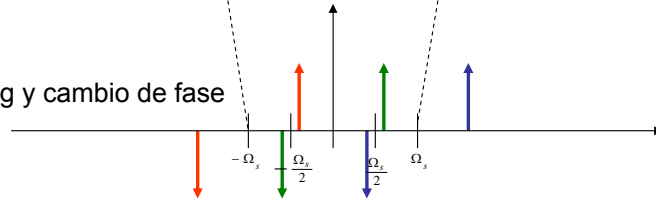
No aliasing



Casi aliasing



Aliasing y cambio de fase



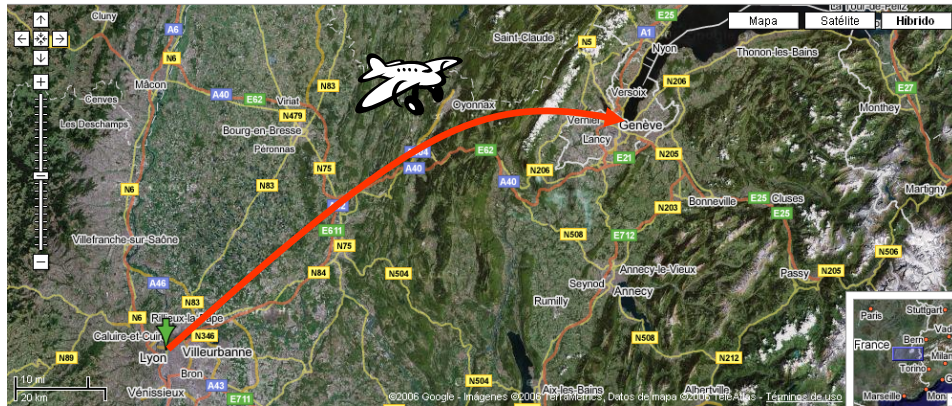
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

7

Bibliografía: Opp 4.2

Aliasing



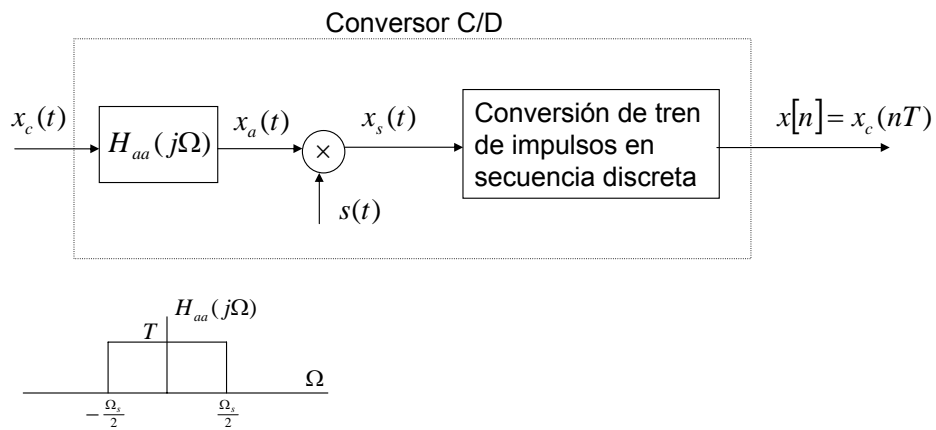
Applet: <http://www.dsptutor.freeuk.com/aliasing/AliasingDemo.html>
<http://www2.egr.uh.edu/~glover/applets/Sampling/Sampling.html>
<http://www.sic.rma.ac.be/~xne/el401/aliasing>

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

8

Filtro Anti-aliasing



Curso 2009/2010

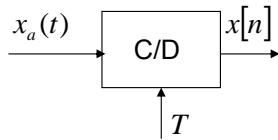
TDS EPS-San Pablo CEU

9

Bibliografía: Opp 4.2

Problemas Opp: 4.5*, 4.8*

Muestreo de señales aleatorias

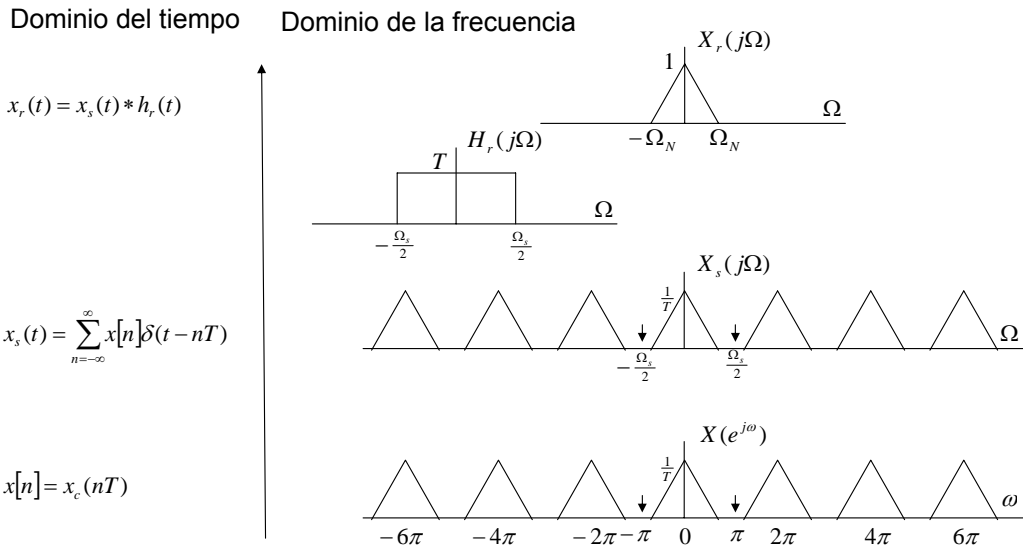


Supongamos que $x_a(t)$ es un proceso aleatorio de media cero, estacionario en sentido amplio, con densidad espectral de potencia $S_{x_a}(j\Omega)$ y limitado en banda Ω_N . Entonces,

$$(1.8) \quad \phi_{xx}[m] = E\{x[n]x[n+m]\} = E\{x_a(nT)x_a((n+m)T)\} = \phi_{x_ax_a}(mT)$$

$$(1.9) \quad S_x(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{x_a}(j(\Omega - k\Omega_s))$$

Reconstrucción de la señal



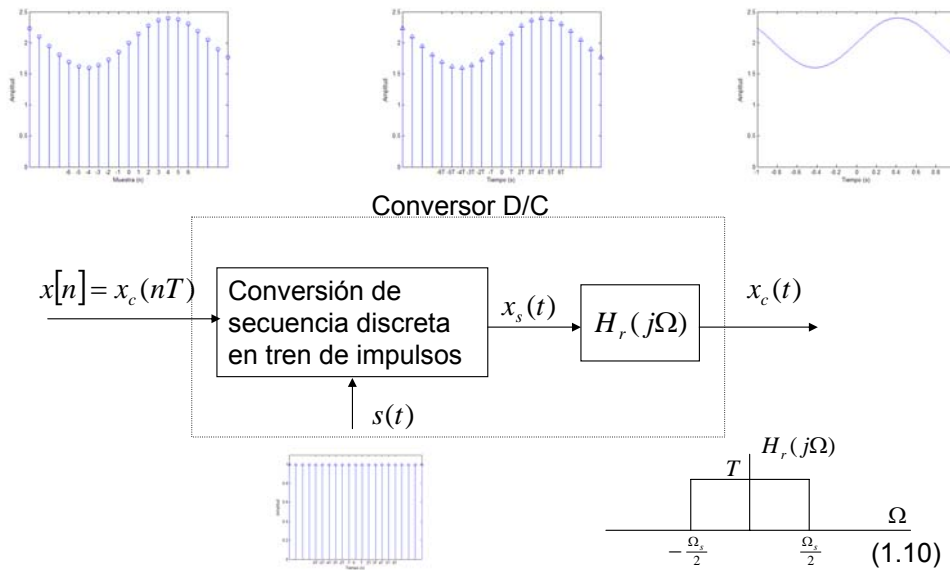
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

11

Bibliografía: Opp 4.3

Reconstrucción de la señal



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

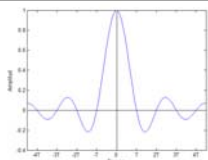
12

Bibliografía: Opp 4.3

Reconstrucción de la señal

Dominio del tiempo

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT) \quad (1.11)$$



$$h_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \quad (1.13)$$

$$x[n] = x_c(nT) \quad (1.15)$$

Dominio de la frecuencia

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X_s(j\Omega) = H_r(j\Omega) X(e^{j\Omega T}) \quad (1.12)$$

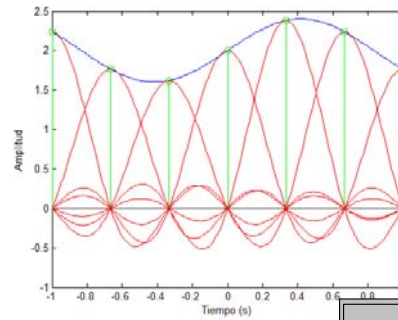
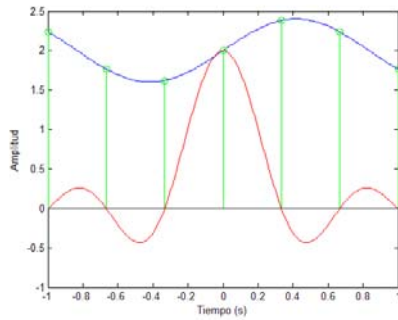
$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega nT} = X(e^{j\Omega T}) \quad (1.14)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1.16)$$

Reconstrucción de la señal

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\text{sen}[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

$$h_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU



14

Bibliografía: Opp 4.3

Problemas Opp: 4.19

Problemas Pro: 9.12

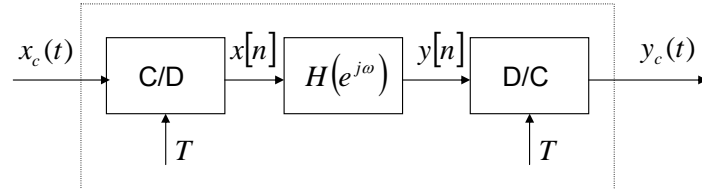
Teorema del muestreo (1.17)

Sea una señal $x_c(t)$ limitada en ancho de banda cuya frecuencia máxima es f_{\max} . Entonces, esta señal se puede recuperar exactamente a partir de sus muestras tomadas a una frecuencia $\frac{1}{T} = f_s \geq 2f_{\max}$ mediante la

función de interpolación $h_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$. La fórmula correspondiente de

interpolación es $x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT)$

Procesado discreto de señales continuas



$$\begin{array}{ccc}
 \text{[1.4]} & & \text{[1.12]} \\
 X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}) & \xrightarrow{\quad} & Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) & \xrightarrow{\quad} & Y_c(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T})
 \end{array}$$

$$Y_c(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega)$$

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega T| < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}(j\frac{\omega}{T}) \quad \forall \omega: |\omega| < \pi \quad (1.19)$$

Invarianza de la respuesta al impulso

$$h[n] = Th_{eff}(nT) \quad (1.20)$$



Procesado discreto de señales continuas

Ejemplo: 

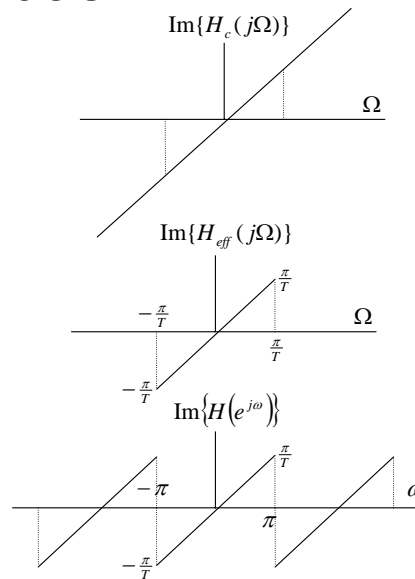
$$y_c(t) = \frac{dx_c(t)}{dt}$$

$$H_c(j\Omega) = j\Omega$$

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega & |\Omega T| < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T} \quad \forall \omega : |\omega| < \pi$$

$$[0.125] \quad h[n] = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{nT} & n \neq 0 \end{cases}$$



Curso 2009/2010

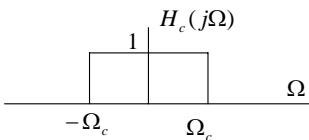
TDS EPS-San Pablo CEU

17

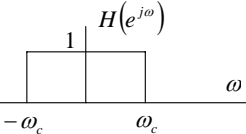
Bibliografía: Opp 4.4

Procesado discreto de señales continuas

Ejemplo: 

$$H_c(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_c : \Omega_c T < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$


$$h(t) = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c}{\pi} t\right)$$

$$h[n] = Th(nT) = T \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c}{\pi} nT\right) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$


$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c : \omega_c < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \begin{matrix} \omega_c = \Omega_c T \\ -\pi \leq \omega < \pi \end{matrix}$$

[1.11]

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

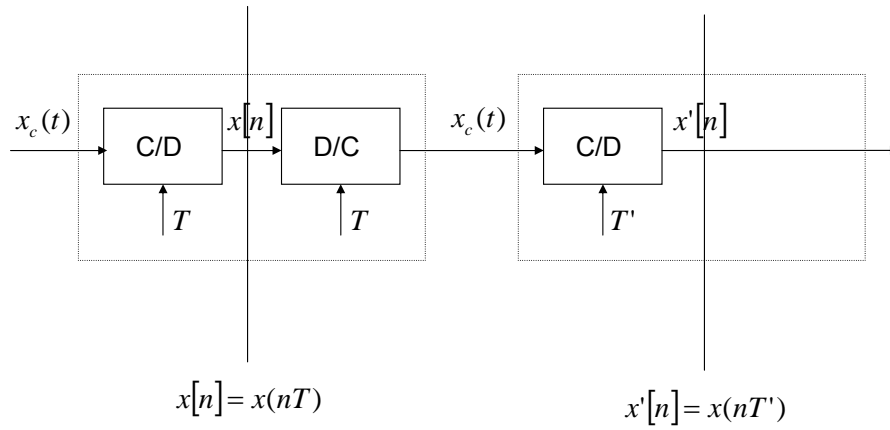
18

Bibliografía: Opp 4.4

Problemas Opp: 4.12, 4.13, 4.20*, 4.22, 4.23, 4.24*, 4.25, 4.28*, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34, 4.35, 4.37, 4.45, 4.49

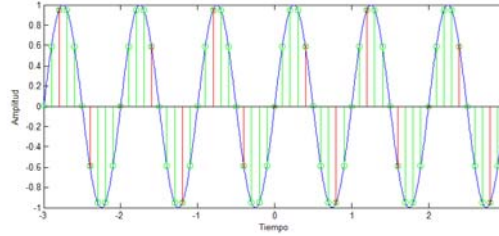
Problemas Pro: 9.4, 9.5

Cambio de la frecuencia de muestreo



Reducción de la frecuencia de muestreo

$$x[n] \xrightarrow{\downarrow M} x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT) \Rightarrow T' = MT \quad (1.21)$$



$$\begin{aligned}
 [1.4] \quad X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T} - k \frac{2\pi}{T})) & r = i + kM \\
 X_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T'} - r \frac{2\pi}{T'})) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{MT} - r \frac{2\pi}{MT})) = \sum_{-\infty < k < \infty} \downarrow 0 \leq i \leq M-1 \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{MT} - k \frac{2\pi}{T} - i \frac{2\pi}{MT})) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\omega}{M} - \frac{2\pi i}{M})}) \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

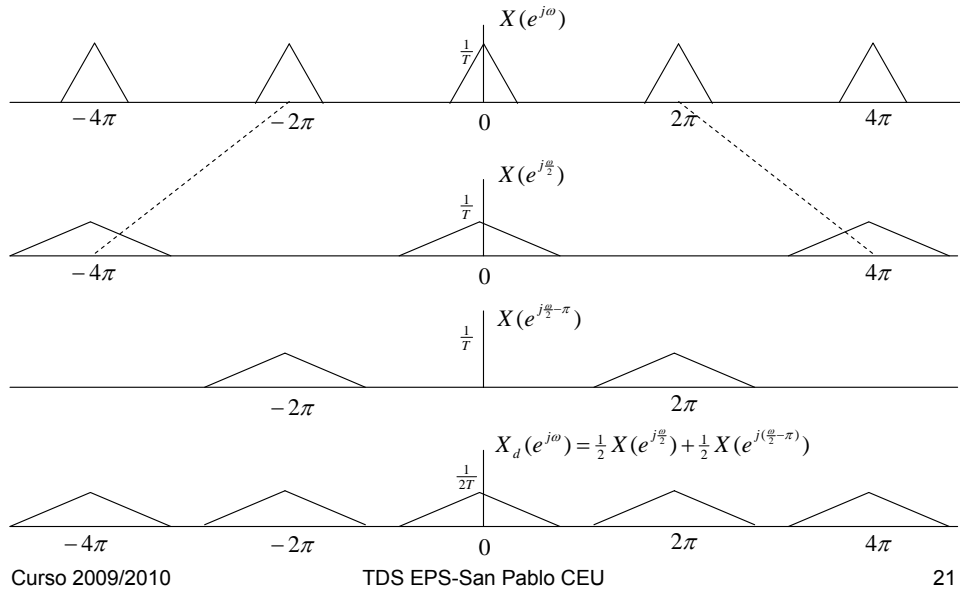
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

20

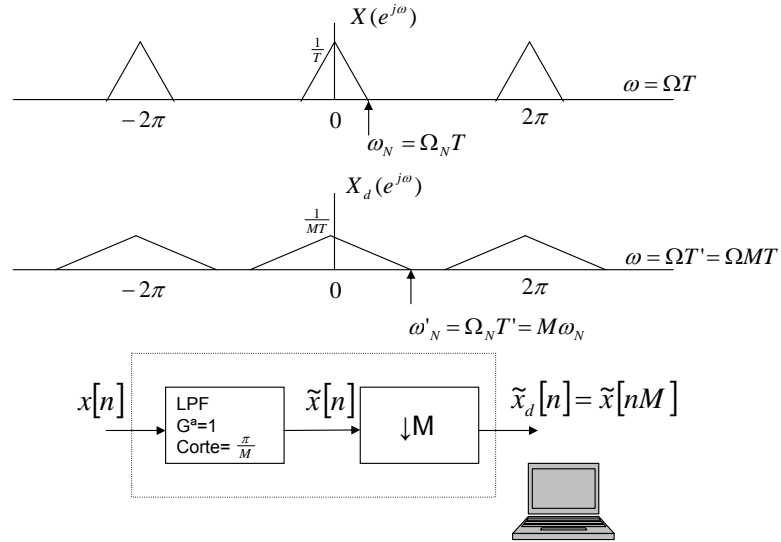
Bibliografía: Opp 4.6

Reducción de la frecuencia de muestreo



Bibliografía: Opp 4.6

Reducción de la frecuencia de muestreo



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

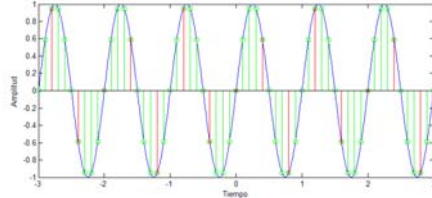
22

Bibliografía: Opp 4.6

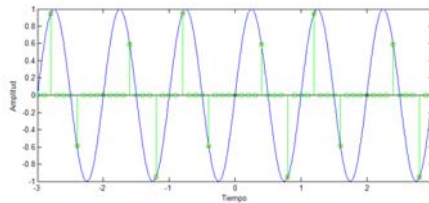
Problemas Opp: 4.9*, 4.14, 4.26, 4.36, 4.46

Incremento de la frecuencia de muestreo

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow L} \rightarrow x_i[n] = x_c(nT/L) \Rightarrow T' = T/L \quad (1.23)$$



$$(1.24) \quad x_c[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \longleftrightarrow X_c(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{j\omega kL} = X(e^{j\omega L}) \quad (1.25)$$



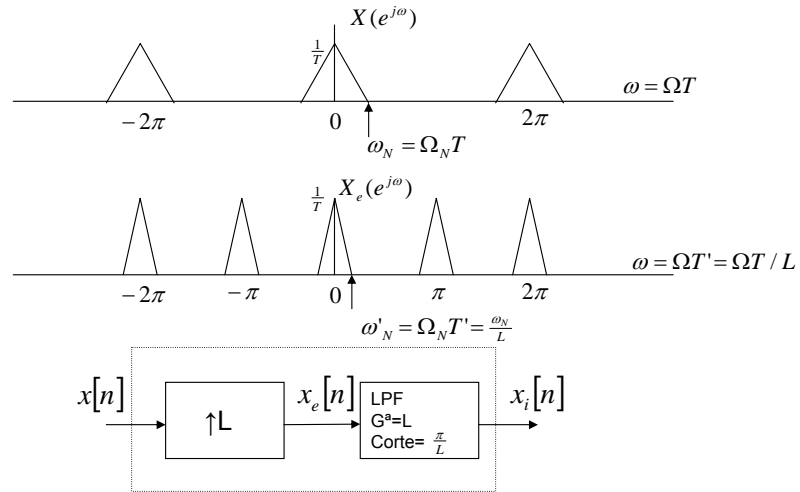
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

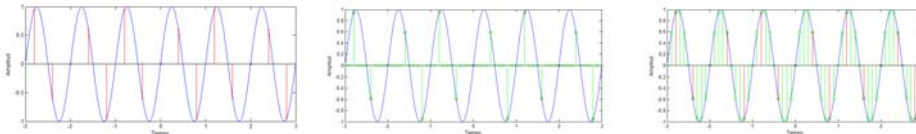
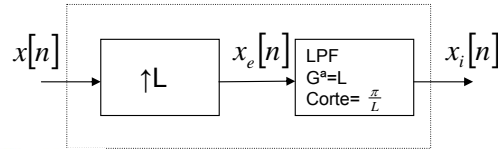
23

Bibliografía: Opp 4.6

Incremento de la frecuencia de muestreo

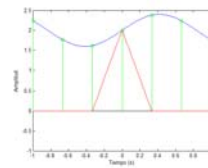
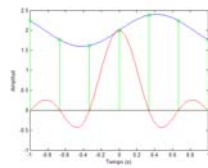


Incremento de la frecuencia de muestreo



$$x_i[n] = x_e[n] * h_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e[kL] h_i[n-kL] \quad (1.26)$$

$$h_i[n] = \sin c\left(\frac{n}{L}\right) \quad (1.27)$$



$$h_i[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L} & |n| < L \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1.28)$$



Incremento de la frecuencia de muestreo

Interpoladores

[1.27] Ideal

$$h_i[n] = \text{sinc}\left(\frac{n}{L}\right)$$

[1.28] Lineal

$$h_i[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L} & |n| < L \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$h_i[0] = 1$$

$$h_i[kL] = 0$$

$$(1.29) \quad H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left(\frac{\sin(\omega \frac{L}{2})}{\sin(\omega \frac{1}{2})} \right)^2 \longrightarrow \text{Distorsión en frecuencia}$$



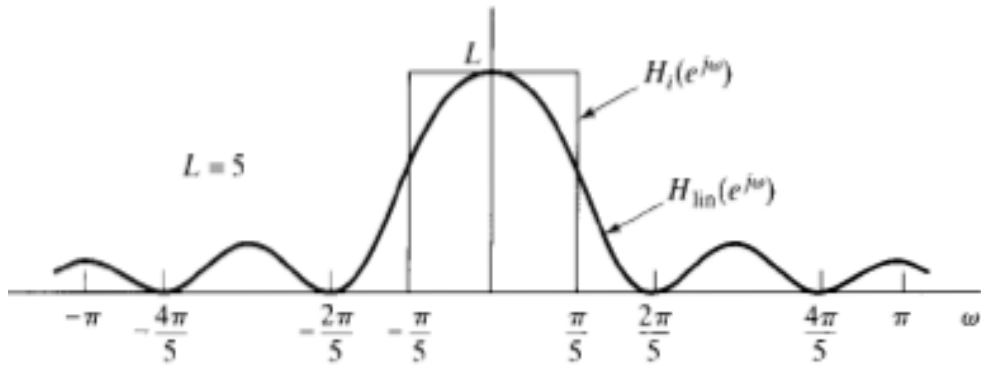
Bibliografía: Opp 4.6

Problemas Opp: 4.15, 4.27, 4.29, 4.39*

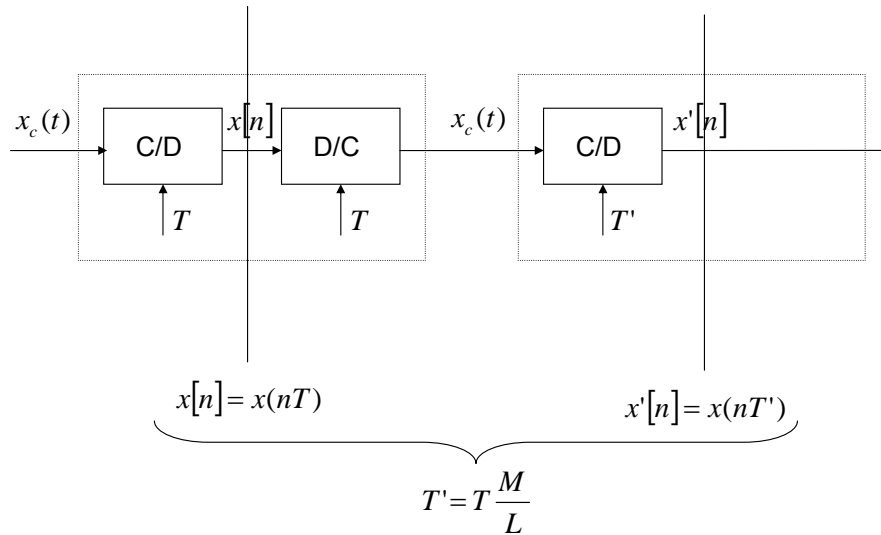
Incremento de la frecuencia de muestreo

(a)

Respuesta en frecuencia del interpolador lineal (caso $L=5$)



Cambio de la frecuencia de muestreo por un factor racional



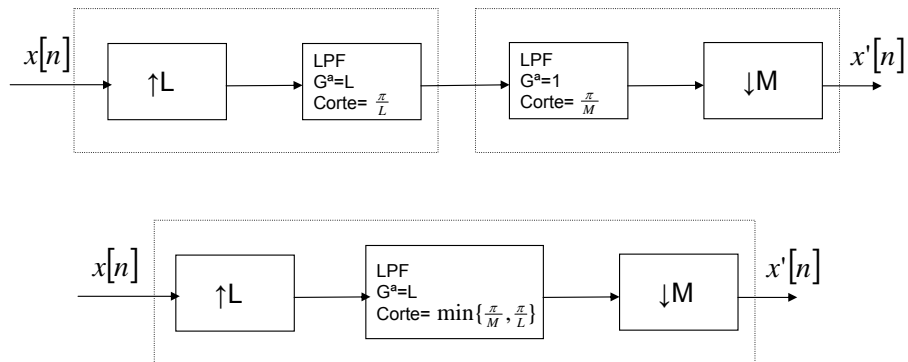
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

28

Bibliografía: Opp 4.6

Cambio de la frecuencia de muestreo por un factor racional



Curso 2009/2010

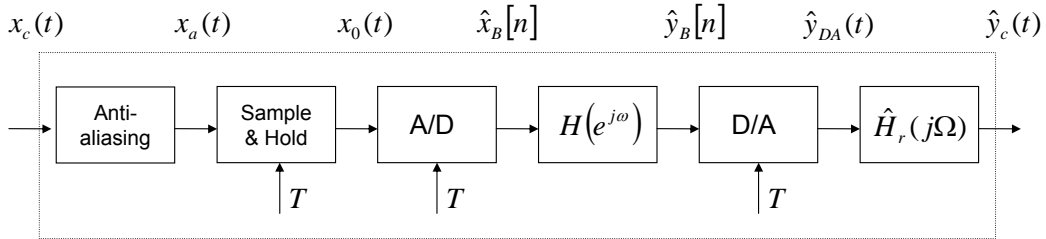
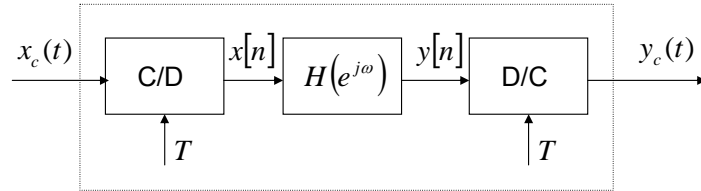
TDS EPS-San Pablo CEU

29

Bibliografía: Opp 4.6

Problemas Opp: 4.16*, 4.17*, 4.18, 4.38*, 4.40*, 4.41, 4.42, 4.44, 4.51, 4.52, 4.53, 4.54, 4.55, 4.58, 4.59, 4.60

Implementación real



Presentación: <http://www.ieee.org/web/membership/IEEEtv/about.html>
(Analog to digital types)

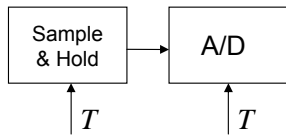
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

30

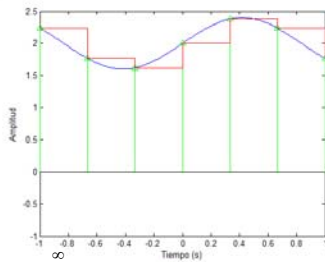
Bibliografía: Opp 4.8

Sample & Hold: zero-order hold

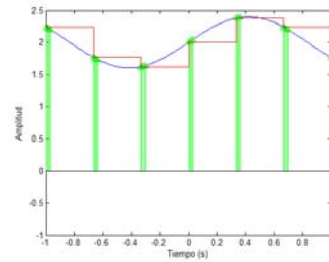


$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \left| \quad H_0(j\Omega) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\Omega_s}\right) e^{-j\pi\frac{\Omega}{\Omega_s}} \right. \quad (1.31)$$

(1.30)



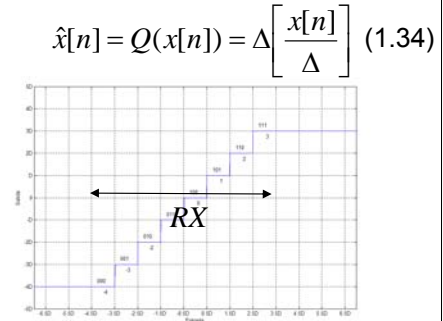
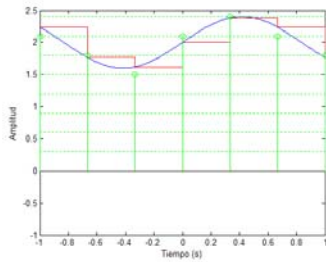
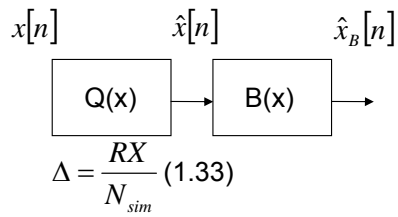
Se necesita mantener estable la entrada al convertor A/D para que éste pueda convertir correctamente a binario.



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT) = \quad (1.32)$$

$$= x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

Cuantificación de la señal: A/D



$$(1.35) \hat{x}_B[n] = B(\hat{x}[n]) = \left(\frac{\hat{x}[n]}{\Delta} \right)_{(2)}$$

$$(1.36) \hat{x}_B[n] = B(\hat{x}[n]) = \left(\frac{\hat{x}[n]}{\Delta} + \left\lfloor \frac{N_{sim}}{2} \right\rfloor \right)_{(2)}$$

$$(1.37) \hat{x}_B[n] = B(\hat{x}[n]) = \left(\frac{\hat{x}[n]}{RX/2} \right)_{(2)}$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

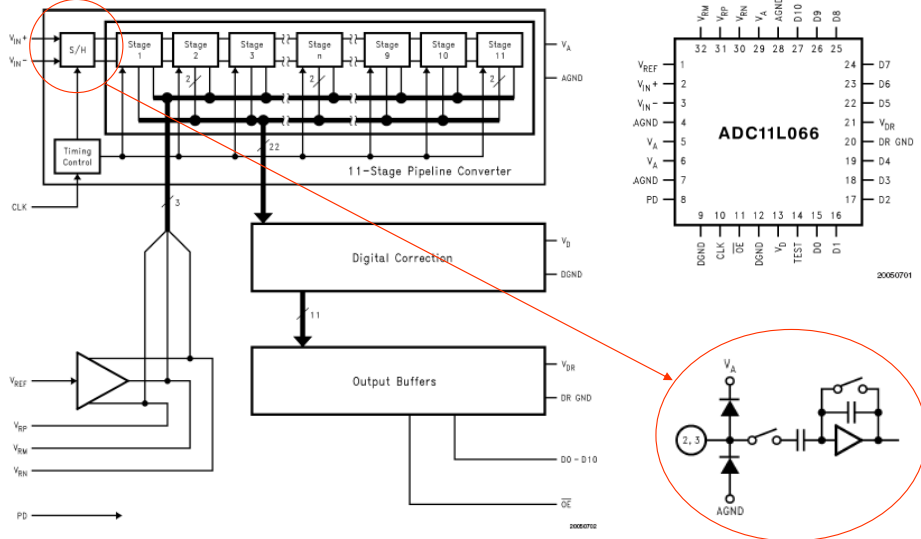
32

Bibliografía: Opp 4.8

Ejercicio: implementar un cuantificador

Cuantificación de la señal: A/D

Block Diagram



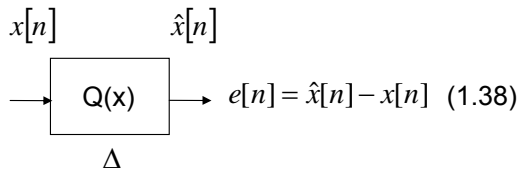
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

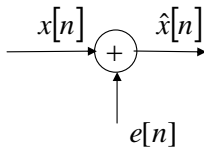
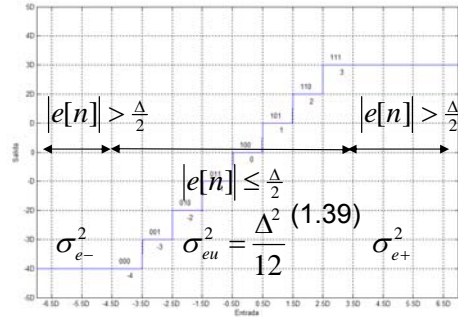
33

National semiconductor ADC11L066CIVYX: 11-Bit, 66 MSPS, 450 MHz Bandwidth A/D Converter with Internal Sample-and-Hold

Error de cuantificación



- El error es un proceso aleatorio estacionario
- Está incorrelado con la señal de entrada
- Es un proceso incorrelado
- Tiene una distribución "uniforme"



$$\sigma_e^2 = \sigma_{e^-}^2 \Pr\{x \in R_-\} + \sigma_{eu}^2 \Pr\{x \in R_u\} + \sigma_{e^+}^2 \Pr\{x \in R_+\} \quad (1.40)$$

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\frac{\Delta^2}{12}} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\left(\frac{RX}{N_{sim}}\right)^2} \quad (1.41)$$

$$\approx 10.8 + 20 \log_{10} N_{sim} - 20 \log_{10} \frac{RX}{\sigma_x} \quad (1.42)$$

$$= 10.8 + 6.02B - 20 \log_{10} \frac{RX}{\sigma_x}$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

34

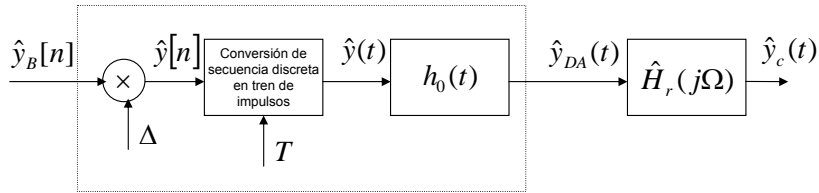
Bibliografía: Opp 4.8

Ejercicio: Comprobar que el error de cuantificación tiene una distribución uniforme y que está incorrelado consigo mismo y con la señal.

Ejercicio: Estudiar la influencia de la relación RX/σ_x sobre la SNR

Problemas Pro: 1.16

Conversión D/A



$$\hat{y}_{DA}(t) = h_0(t) * \hat{y}(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \hat{y}_B[n] \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{y}[n] h_0(t - nT) \quad [1,30,1.32]$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \hat{y}_B[n] \delta(t - nT)$$

$$(1.43) \quad \hat{Y}_{DA}(j\Omega) = \hat{Y}(e^{j\Omega T}) H_0(j\Omega)$$

$$(1.44) \quad \hat{Y}_c(j\Omega) = \hat{Y}(e^{j\Omega T}) H_0(j\Omega) \hat{H}_r(j\Omega) = \hat{Y}(e^{j\Omega T}) H_r(j\Omega)$$

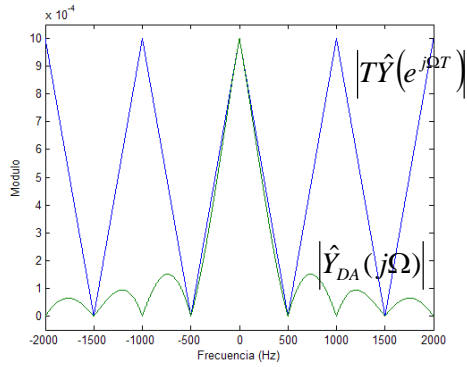
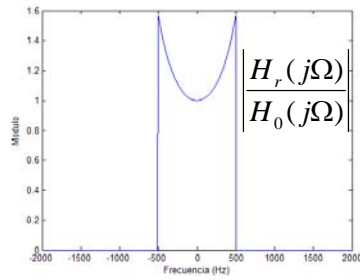
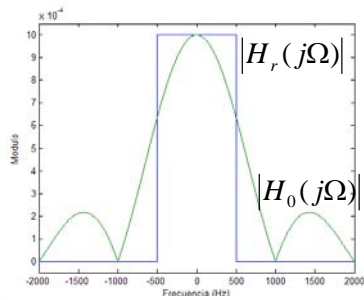
$$(1.45) \quad \hat{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)} = \begin{cases} \sin c^{-1}\left(\frac{\Omega}{\Omega_s}\right) e^{j\pi \frac{\Omega}{\Omega_s}} & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Bibliografía: Opp 4.8

Ejercicio: Implementar este sistema

Conversión D/A



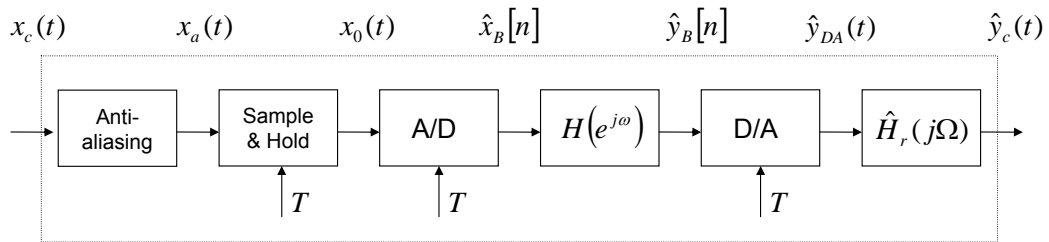
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

36

Bibliografía: Opp 4.8

Procesado digital: A/D+filtro+D/A



$$X_a(j\Omega) = H_{aa}(j\Omega)X_c(j\Omega)$$

$$\hat{X}_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{\Delta} \hat{X}(e^{j\omega}) \quad [1.35]$$

$$X_0(j\Omega) = H_0(j\Omega)X_a(j\Omega)$$

$$\hat{Y}_B(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\hat{X}_B(e^{j\omega})$$

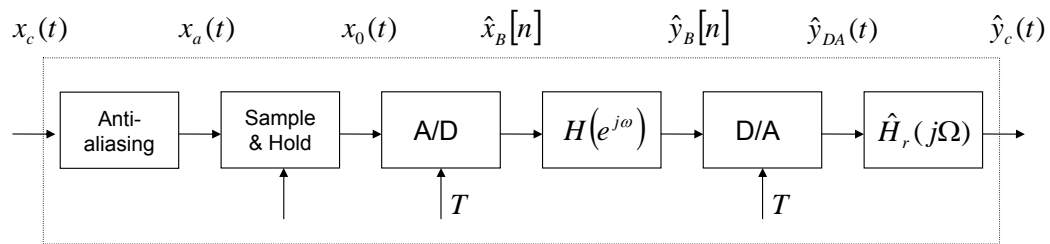
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(j(\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi}{T})) \quad [1.4]$$

$$\hat{Y}_{DA}(j\Omega) = \Delta \hat{Y}_B(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega) \quad [1.44]$$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + E(e^{j\omega}) \quad [1.38]$$

$$\hat{Y}_c(j\Omega) = \hat{Y}_{DA}(j\Omega)\hat{H}_r(j\Omega)$$

Procesado digital: A/D+filtro+D/A



$$(1.50) \quad \hat{Y}_c(j\Omega) = \hat{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{aa}(j\Omega)X_c(j\Omega) + E(j\Omega)$$

$$(1.51) \quad S_e(j\Omega) = \left| \hat{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T}) \right|^2 \sigma_e^2$$



Bibliografía: Opp 4.8

Problemas Opp: 4.43, 4.56

Problemas Pro: 9.15

Conversión D/A

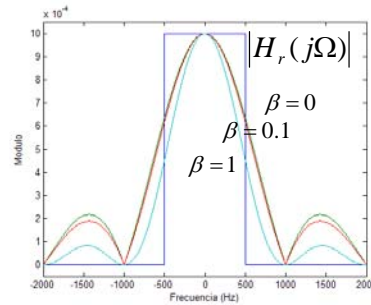
Sample & Hold: 1st order

$$(1.46) \quad \hat{y}_{DA}(t) = \hat{y}[n] + \beta \frac{\hat{y}[n] - \hat{y}[n-1]}{T} (t - nT) \quad nT \leq t < (n+1)T$$



$$(1.47) \quad \hat{y}_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{y}[n] h_1(t - nT)$$

$$(1.48) \quad h_1(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & 0 \leq t < T \\ 1 - \frac{t}{T} & T \leq t < 2T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$(1.49) \quad H_1(j\Omega) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\Omega_s}\right) \left(1 - \beta + \beta \left(1 + j \frac{\Omega}{\Omega_s} \right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\Omega_s}\right) e^{-j\pi \frac{\Omega}{\Omega_s}} \right) \quad [1.31]$$

Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

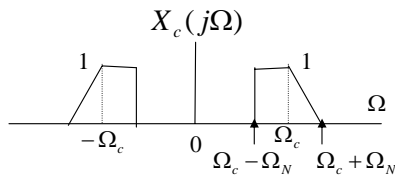
39

Bibliografía: Opp 4.8

Problemas Opp: 4.57

Problemas Pro: 9.14

Muestreo de señales paso banda



$$\Omega_s \geq 2(\Omega_c + \Omega_N)!!$$

Solución: Muestrear el equivalente paso bajo

[0.153] $x(t) = x_c(t) \cos \Omega_c t - x_s(t) \sin \Omega_c t$

El ancho de banda de la señal equivalente paso bajo es Ω_N .
La idea es muestrear la componente en fase y en cuadratura por separado

Supongamos que $\Omega_c + \Omega_N = k(2\Omega_N)$ (1.52)

$$\Omega_s = 2(2\Omega_N) \quad (1.53)$$

Nyquist

Bibliografía: Proakis 9.1

Hacer aquí Opp 4.21

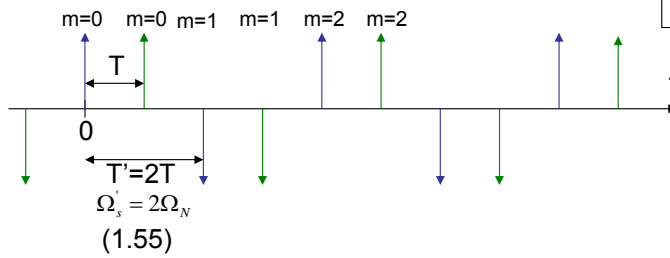
Muestreo de señales paso banda

[0.153] $x(t) = x_c(t) \cos \Omega_c t - x_s(t) \sin \Omega_c t$

(1.54) $x[n] = x(nT) = x_c(nT) \cos \Omega_c nT - x_s(nT) \sin \Omega_c nT = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_c + \Omega_N = k(2\Omega_N) \\ \Omega_s = 2(2\Omega_N) = \frac{2\pi}{T} \end{array} \right. \leftarrow$
 $= x_c(nT) \cos(\pi n \frac{2k-1}{2}) - x_s(nT) \sin(\pi n \frac{2k-1}{2}) =$ [1.52, 1.53]

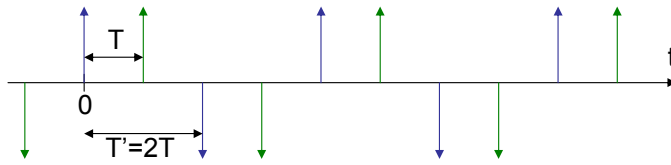
$$= \begin{cases} x_c(mT) (-1)^m & n = 2m \\ (-1)^{k+1} x_s(mT - T) (-1)^m & n = 2m - 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_c + \Omega_N = k(2\Omega_N) \rightarrow \Omega_N = \frac{\Omega_c}{2k-1} \\ \Omega_s = 2(2\Omega_N) = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \Omega_N = \frac{\pi}{2T} \\ \frac{\Omega_c}{2k-1} = \frac{\pi}{2T} \Rightarrow \Omega_c T = \pi \frac{2k-1}{2} \end{array} \right\}$$



Muestreo de señales paso banda

Reconstrucción de cada una de las componentes



$$\begin{aligned} x[0] &= x_c[0](-1)^0 \\ x[1] &= x_s[0](-1)^{k+1} \\ x[2] &= x_c[1](-1)^1 \\ x[3] &= x_s[1](-1)^{1+k+1} \\ x[4] &= x_c[2](-1)^2 \\ x[5] &= x_s[2](-1)^{2+k+1} \end{aligned}$$

$$(1.56) \quad x_c[m] = x[2m](-1)^m \qquad x_s[m] = x[2m+1](-1)^{m+k+1} \quad (1.57)$$

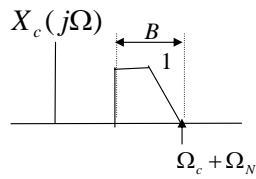
$$(1.58) \quad x_c(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_c[m]h_r(t-mT') \qquad x_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_s[m]h_r(t-(mT'+T)) \quad (1.59)$$

Muestreo de señales paso banda

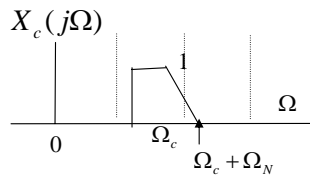
$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_c(t) \cos \Omega_c t - x_s(t) \sin \Omega_c t = && [0.153, 1.58, 1.59] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x_c[m] h_r(t - mT) \cos \Omega_c t - x_s[m] h_r(t - (mT+T)) \sin \Omega_c t) = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x[2m] (-1)^m h_r(t - mT) \cos \Omega_c t - x[2m+1] (-1)^{m+k+1} h_r(t - (mT+T)) \sin \Omega_c t) = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x[2m] h_r(t - 2mT) \cos \Omega_c(t - 2mT) - x[2m+1] h_r(t - (2m+1)T) \cos \Omega_c(t - (2m+1)T)) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT) \cos \Omega_c(t - nT) \quad \text{Suponiendo que } \Omega_c + \Omega_N = k(2\Omega_N) \quad [1.52] \\
 & \quad \quad \quad (1.60)
 \end{aligned}$$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
 $\Omega_c T = \pi \frac{2k-1}{2}$

Muestreo de señales paso banda

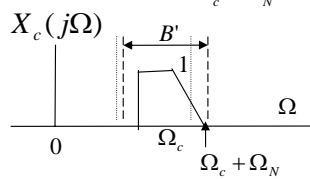


Supongamos que $\Omega_c + \Omega_N = kB$



Supongamos que $\Omega_c + \Omega_N \neq kB$ (1.61)

Entonces $k = \left\lfloor \frac{\Omega_c + \Omega_N}{B} \right\rfloor$ (1.62)



$$B' = 2\Omega_N = \frac{\Omega_c + \Omega_N}{k} \quad (1.63)$$

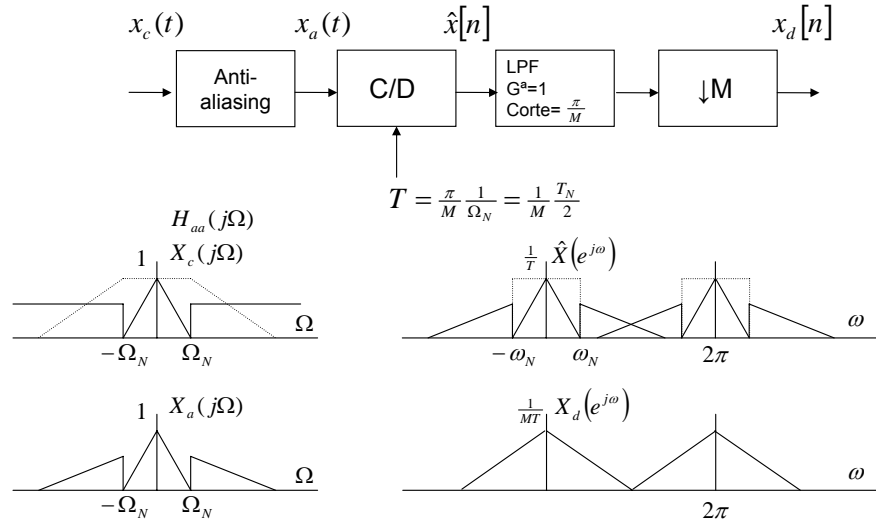
$$\Omega_c' + \Omega_N' = kB' \quad (1.64)$$

$$2(2\Omega_N) \leq \Omega_s' < 4(2\Omega_N) \quad (1.65)$$

Bibliografía: Proakis 9.1

Problemas Pro: 9.1, 9.2, 9.3, 9.13

Aplicaciones del oversampling: Filtros antialiasing



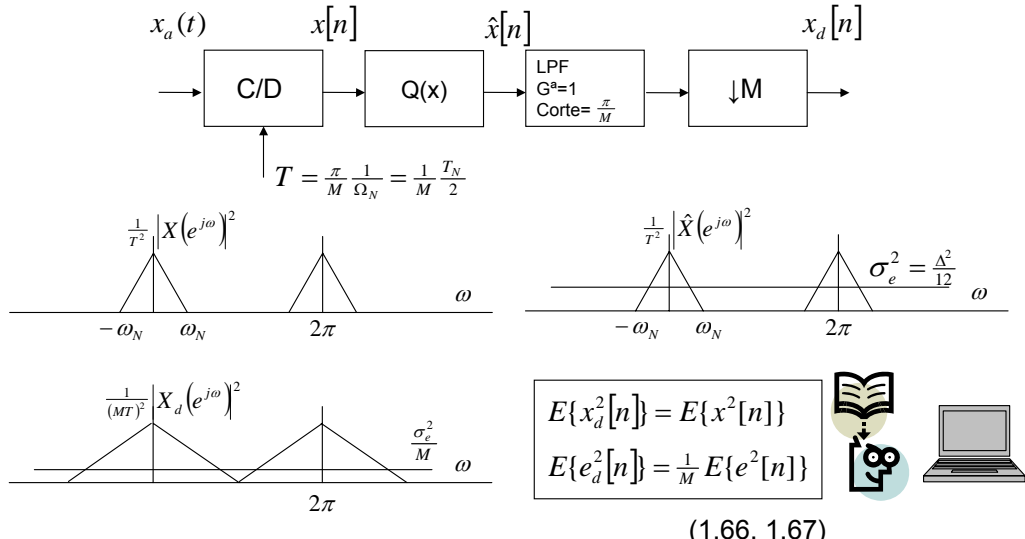
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

45

Bibliografía: Opp 4.9

Aplicaciones del oversampling: Reducción del ruido de muestreo



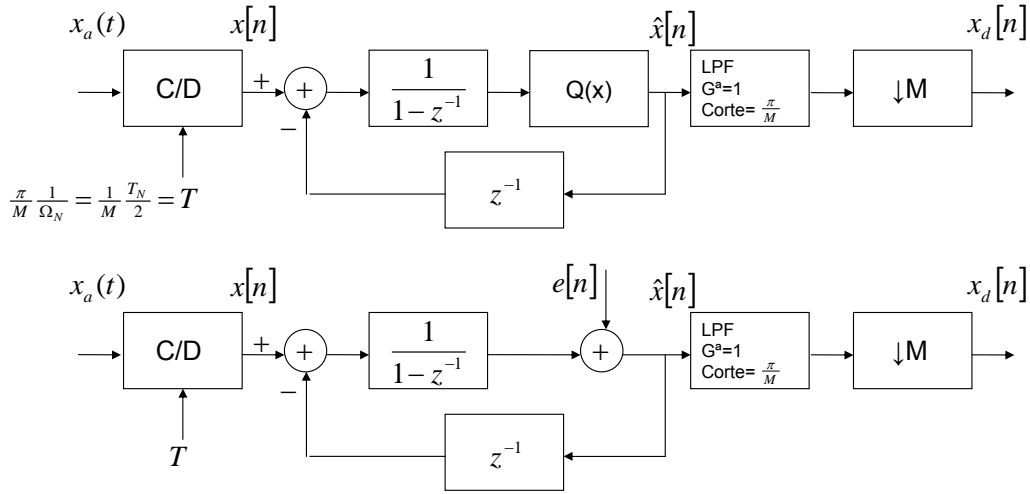
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

46

Bibliografía: Opp 4.9

Aplicaciones del oversampling: Noise shaping



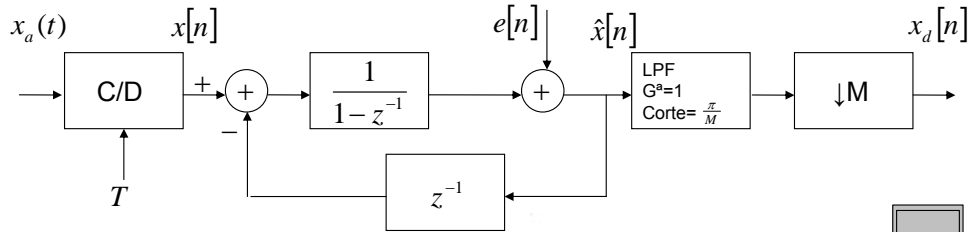
Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

47

Bibliografía: Opp 4.9

Aplicaciones del oversampling: Noise shaping



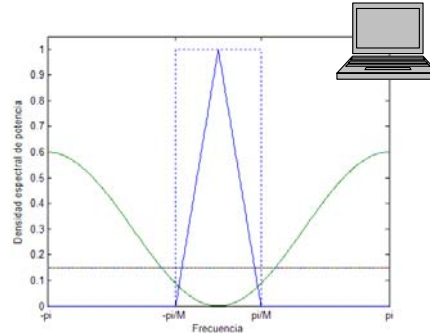
$$\hat{X}(z) = (X(z) - z^{-1}\hat{X}(z)) \frac{1}{1-z^{-1}} + E(z)$$

$$(1.68) \hat{X}(z) = X(z) + (1-z^{-1})E(z)$$

$$(1.69) \hat{x}[n] = x[n] + e[n] - e[n-1] = x[n] + e'[n]$$

$$\sigma_{e'}^2 = 2\sigma_e^2 \quad (1.70)$$

$$(1.71) S_{e'}(e^{j\omega}) = |1 - e^{-j\omega}|^2 \sigma_e^2 = (2 \sin \frac{\omega}{2})^2 \sigma_e^2$$



Curso 2009/2010

TDS EPS-San Pablo CEU

48

Bibliografía: Opp 4.9

Problemas Opp: 4.61, 4.62

Problemas Pro: 9.8

Resumen

- Muestreo periódico (D/C y C/D)
- Procesado discreto de señales continuas
- Cambio del periodo de muestreo
- Conversión D/A y A/D
- Muestreo de señales paso banda
- Aplicaciones del oversampling

Tema 2 – Transformada Z y análisis transformado de sistemas LTI

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Bibliografía: Oppenheim I (Cap. 10), Oppenheim II (Cap. 3), Proakis (Cap. 3)

Funciones propias de los sistemas LTI

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_0^k h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{n-k} = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{-k} = z_0^n H(z_0) \quad [0.46]$$

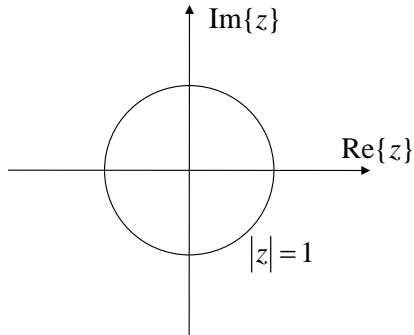
$$x[n] = z_0^n \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{-k} = H(z_0)$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n \quad [0.47]$$

Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$z = re^{j\omega} \rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} = TF\{x[n]r^{-n}\} \rightarrow TF\{x[n]\} = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$



La transformada Z de $x[n]$ converge en z si la transformada de Fourier de $x[n]r^{-n}$ converge, es decir, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$

Si converge para z_0 , entonces converge para $\forall z: |z|=|z_0|$. Esto define una región de convergencia (ROC).

La transformada de Fourier converge, si la ROC incluye al círculo unidad.

$X(z)$ y todas sus derivadas son continuas dentro de la ROC.

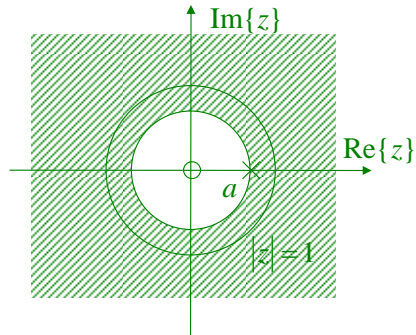
Transformada Z

Ejemplo:

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\text{Si } |az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$



Se llaman polos a aquellos puntos para los que $X(z) = \infty$.
Se llaman ceros a aquellos puntos para los que $X(z) = 0$.

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

4

Bibliografía: Oppenheim II 3.1, Proakis 3.1

Transformada Z

Ejemplo:

$$x[n] = a^n u[n] + b^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = -\frac{1}{1-bz^{-1}} + \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\text{Si } |az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

$$\text{Si } |b^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < |b|$$

Caso 1: $|b| < |a|$ No existe $X(z)$

Caso 2: $|b| = |a|$ No existe $X(z)$

Caso 3: $|b| > |a|$ Existe $X(z)$ para $|a| < |z| < |b|$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

5

Bibliografía: Oppenheim II 3.1, Proakis 3.1

Ejemplo: Proakis, pp 160

Problemas Opp: 3.1*, 3.2*, 3.24

Problemas Pro: 3.1

Transformada Z

Polos y ceros de una transformada racional

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^{-M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^{-N} \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

\uparrow (N-M) ceros ó (M-N) polos en el origen M ceros fuera del origen
 \uparrow N polos fuera del origen

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

6

Bibliografía: Oppenheim II 3.1, Proakis 3.1, Proakis 3.3
Problemas Pro: 3.21

Relación con la TF

$$\bullet \left| X(e^{j\omega}) \right|^2 = X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) = X(z) X^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\bullet \text{Cuidado con } TF\{x[n]\} = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Ejemplo:

$$x[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right) \quad \neg \exists r : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] r^{-n}| < \infty \Rightarrow \neg \exists X(z)$$

¡pero la TF tiende en sentido L2 a una función periódica discontinua!

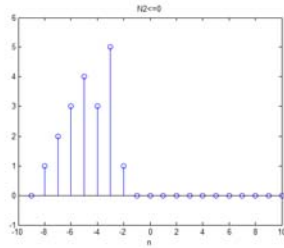
Ejemplo:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n)$$

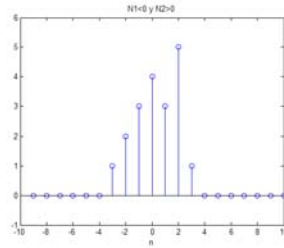
En estos casos no se debe pensar en la TF como la evaluación de la TZ en el círculo unidad.

Propiedades de la ROC

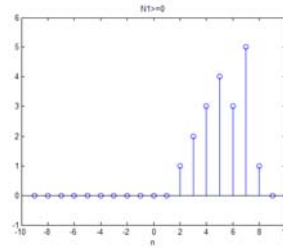
- La ROC se compone de regiones anulares centradas en el origen del plano z .
- La ROC no contiene ningún polo
- Si $x[n]$ es de duración finita entonces la ROC es todo el plano z salvo con posible excepción de $z=0$ y/o $z=\infty$.



$\{\infty\} \notin ROC$



$\{0, \infty\} \notin ROC$



$\{0\} \notin ROC$

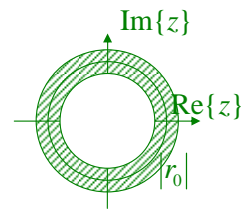
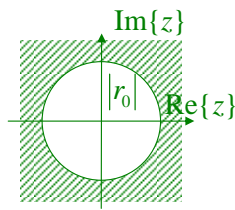
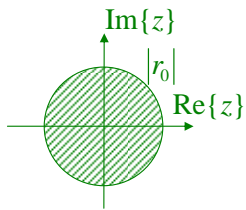
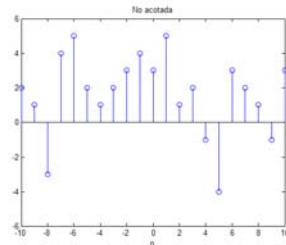
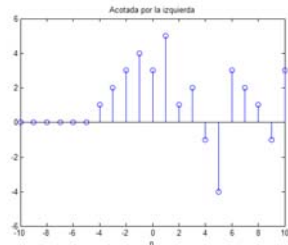
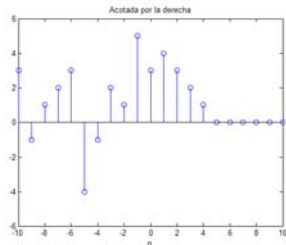
Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

8

Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

Propiedades de la ROC



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

9

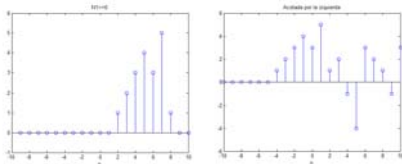
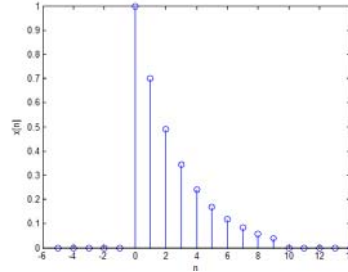
Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

Propiedades de la ROC

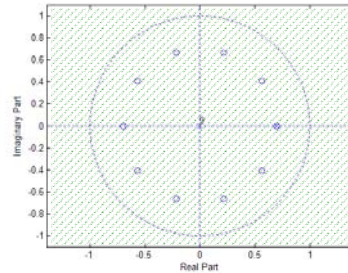
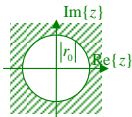
Ejemplo:

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{z^{-N} z^N - a^N}{z^{-1} z - a}$$



$\{0\} \notin ROC$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

10

Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

Ejercicio: representar los polos y ceros de una transformada Z

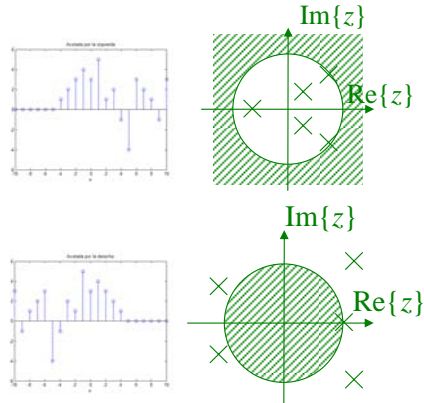
Propiedades de la ROC

• Si $X(z)$ es racional, entonces su ROC está delimitada por polos o se extiende hasta el infinito.

• Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ está acotada por la izquierda, entonces la ROC se extiende desde el polo más externo hacia el infinito. Si además $x[n]$ es causal, entonces el infinito está incluido en la ROC.

• Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ está acotada por la derecha, entonces la ROC se extiende desde el origen hasta el polo más interno. Si además $x[n]$ es anticausal, entonces el origen está incluido en la ROC.

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

11

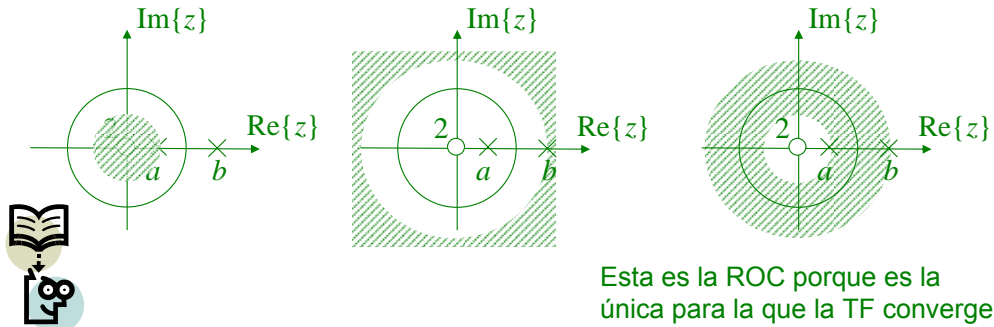
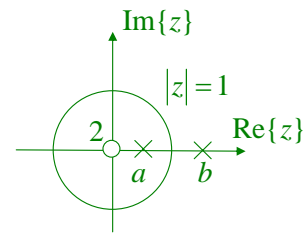
Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

Problemas Opp: 3.8*, 3.10*, 3.11*, 3.46

Propiedades de la ROC

Ejemplo:

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \quad a < 1 < b$$



Esta es la ROC porque es la única para la que la TF converge

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

12

Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

Ejercicio: realizar la TZ inversa de $X(z)$ con cada una de las ROC

Problemas Opp: 3.4*, 3.12, 3.15, 3.48

Problemas Pro: 3.5, 3.20, 3.44, 3.51, 3.53



Propiedades de la TZ

Linealidad

$$Ax[n] + By[n] \longleftrightarrow AX(z) + BY(z)$$

Al menos $ROC_x \cap ROC_y$

Desplazamiento en el tiempo

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow X(z)z^{-n_0}$$

ROC salvo la adición o
substracción del origen

Escalado en el dominio z

TF: Desplazamiento en frecuencia

$$x[n]e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{-j\omega_0} z)$$

ROC

$$x[n]z_0^n \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$|z_0| ROC =$
 $\{z \in \mathbb{C} : z/|z_0| \in ROC\}$

Inversión en el tiempo

$$x[-n] \longleftrightarrow X(z^{-1})$$

ROC^{-1}

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

13

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

Problemas Pro: 3.9



Propiedades de la TZ

Upsampling	$x_m[n] = \begin{cases} x[n/m] & n = mk \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longleftrightarrow X(z^m)$
Downsampling	$x_m[n] = x[nm] \longleftrightarrow \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} X(z^{\frac{1}{m}} e^{-j\frac{2\pi k n}{m}})$
Conjugación	$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*)$
Parte real	$\text{Re}\{x[n]\} \longleftrightarrow \frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$ <p style="text-align: center;">Al menos <i>ROC</i></p>
Parte imaginaria	$\text{Im}\{x[n]\} \longleftrightarrow \frac{1}{2j}(X(z) - X^*(z^*))$ <p style="text-align: center;">Al menos <i>ROC</i></p>
Convolución	$x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(z)Y(z)$ <p style="text-align: center;">Al menos $ROC_x \cap ROC_y$</p>

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

14

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

Problemas Opp: 3.3, 3.7*, 3.9*, 3.16, 3.18, 3.19*, 3.20*, 3.21, 3.22, 3.31, 3.34

Problemas Pro: 3.2, 3.3, 3.4, 3.7*, 3.8, 3.16, 3.27



Propiedades de la TZ

Diferencia finita

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - z^{-1})X(z)$$

Al menos $ROC \cap \{|z| > 0\}$

Integración

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

Al menos $ROC \cap \{|z| > 1\}$

Diferenciación en frecuencia

$$nx[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

ROC

Tma. del valor inicial

Si $x[n] = 0, \forall n < 0$, entonces $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ $\infty \in ROC$

Si $x[n] = 0, \forall n > 0$, entonces $x[0] = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$ $0 \in ROC$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

15

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

Problemas Opp: 3.37, 3.54

Problemas Pro: 3.6*, 3.10, 3.52, 3.54



Propiedades de la TZ

Correlación

$$r_{xy}[l] = x[-l] * y[l] \longleftrightarrow X(z^{-1})Y(z)$$

Al menos $ROC_x \cap ROC_y$

Multiplicación

$$x[n]y^*[n] \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(v)Y^*\left(z^*(v^*)^{-1}\right)v^{-1}dv$$

$$C \subset ROC_{X(z)} \cap ROC_{Y(z^{-1})}$$

Al menos $r_{xl}r_{yl} < |z| < r_{xu}r_{yu}$

Relación de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(v)Y^*\left((v^*)^{-1}\right)v^{-1}dv$$

$$C \subset ROC_{X(z)} \cap ROC_{Y(z^{-1})}$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

16

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

La relación de Parseval sale de la regla de multiplicación particularizada para $z=1$

Problemas Opp: 3.17, 3.32, 3.33, 3.40, 3.41, 3.42, 3.47, 3.50, 3.51*

Problemas Pro: 3.13*, 3.18, 3.22, 3.28, 3.30*, 3.35, 3.42, 3.43, 3.49, 3.50



Algunas TZs

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |a| < |z|$$

$$-a^n u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

$$a^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}} \quad \frac{1}{|a|} < |z| < |a|$$

$$na^n u[n] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |a| < |z|$$

$$(n+1)a^n u[n+1] \longleftrightarrow \frac{1}{(1 - az^{-1})^2} \quad |a| < |z|$$

$$-na^n u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| < |a|$$

$$\delta[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} \quad \begin{cases} C - \{0\} & n_0 > 0 \\ C - \{\infty\} & n_0 < 0 \end{cases}$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

17

Bibliografía: Proakis 3.3, Oppenheim 3.1



Algunas TZs

$$\begin{aligned} r^n (\cos \omega_0 n) u[n] &\longleftrightarrow \frac{1 - (r \cos \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & r < |z| \\ r^n (\cos(\omega_0 n + \phi)) u[n] &\longleftrightarrow \frac{\cos \phi - (r \cos(\omega_0 - \phi)) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & r < |z| \\ r^n (\sin \omega_0 n) u[n] &\longleftrightarrow \frac{(r \sin \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & r < |z| \\ r^n \left(\frac{\sin \omega_0 (n+1)}{\sin \omega_0} \right) u[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & r < |z| \\ a^n (u[n] - u[n - N]) &\longleftrightarrow \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}} & 0 < |z| \end{aligned}$$

Transformada Z inversa

- Directa $x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z)z^{n-1} dz$

Integral de línea para alguna circunferencia $z = |z_0|$: $z_0 \in ROC$
recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

- Inspección
- Expansión en fracciones parciales
- Expansión en serie de potencias

Transformada Z inversa

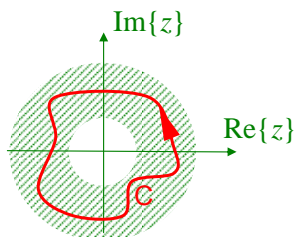
- Directa

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\oint_C X(z)z^{n-1} dz = \oint_C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \right) z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \oint_C z^{n-1-k} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] 2\pi j \delta[n-k] = j2\pi x[n]$$

$C \subset ROC$

Tma. integral de Cauchy 



$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} dz = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1} f(z)}{dz^{k-1}} \right|_{z_0} & z_0 \text{ dentro de } C \\ 0 & z_0 \text{ fuera de } C \end{cases}$$

Si $f(z_0) \neq \infty$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Multiplico por los dos lados por $z^{(n-1)}$ e integro en C. C se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj. Como C está en la ROC la suma converge y se puede intercambiar la suma con la integral. Ejercicio: demostrar que la aplicación del teorema integral de Cauchy a la integral dada da una delta.

Transformada Z inversa

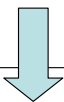
- Directa

Suponiendo que todos los polos son distintos

$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i(z)}{z - z_i} \right) dz = \sum_{i=1}^N \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{A_i(z)}{z - z_i} dz = \sum_{i=1}^N A_i(z_i)$$

$A_i(z) = (z - z_i) \frac{f(z)}{g(z)}$ Residuo del polo i

Suma de los residuos de todos los polos



$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^N (z - z_i) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_i}$$

Transformada Z inversa


- Directa

Suponiendo que hay polos de multiplicidad múltiple

$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{g(z)} dz = \sum_{i=1}^N \frac{1}{(m_i-1)!} \left. \frac{d^{m_i-1} A_i(z)}{dz^{m_i-1}} \right|_{z=z_i}$$

$A_{ik}(z) = (z - z_i)^k \frac{f(z)}{g(z)}$

Suma de los residuos de todos los polos


$$x[n] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{(m_i-1)!} \left. \frac{d^{m_i-1} (z - z_i)^{m_i} X(z) z^{n-1}}{dz^{m_i-1}} \right|_{z=z_i}$$

Transformada Z inversa

- Directa

Ejemplo: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |a| < |z| \rightarrow x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz$

Caso 1: $n \geq 0 \Rightarrow \forall z: z^n \neq \infty$

$$A_1(z) = (z-a) \frac{z^n}{z-a} = z^n \rightarrow x[n] = A_1(z) \Big|_{z=a} = a^n$$

Caso 2: $n < 0 \Rightarrow z = 0: z^n = \infty$ Polo de orden n

$n = -1$

$$\left. \begin{aligned} A_1(z) &= (z-a) \frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{z} \\ A_2(z) &= z \frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{z-a} \end{aligned} \right\} \rightarrow x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{1}{z(z-a)} dz = \frac{1}{z} \Big|_{z=a} + \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} = 0$$

Transformada Z inversa

- Directa

Ejemplo: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \longrightarrow x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz$

Caso 2:

$n = -2$

$$\left. \begin{aligned} A_1(z) &= (z-a) \frac{1}{z^2(z-a)} = \frac{1}{z^2} \\ A_2(z) &= z^2 \frac{1}{z^2(z-a)} = \frac{1}{z-a} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{1}{z^2(z-a)} dz = \\ &= \frac{1}{z^2} \Big|_{z=a} + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{1}{z^2} \Big|_{z=a} - \frac{1}{(z-a)^2} \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned}$$



Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Ejercicio: calcular $x[n]$ para $n=-3$

Problemas Opp: 3.38, 3.39, 3.57

Problemas Pro: 3.29, 3.56, 3.57, 3.58



Transformada Z inversa

- Inspección

Ejemplo: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ $\xrightarrow{|a| < |z|}$ $x[n] = a^n u[n]$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2} - z^{-1}} = 2 \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2} - 2\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{2} < |z| \\ &= -\frac{-2\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2} \end{aligned}$$

$$x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

25

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Opp: 3.5*, 3.13



Transformada Z inversa

- Expansión en fracciones parciales

Ejemplo:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{K_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{K_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \frac{1}{2} < |z|$$

$$K_1 = \left. (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \right|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -1$$

$$K_2 = \left. (1 - \frac{1}{4}z^{-1})X(z) \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2$$

$$X(z) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \frac{1}{2} < |z| \longrightarrow x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

26

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Opp: 3.6*, 3.14*, 3.23, 3.35, 3.36, 3.43*, 3.44, 3.45

Problemas Pro: 3.24, 3.25, 3.26, 3.33, 3.37, 3.38*, 3.39, 3.40*, 3.41, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.55



Transformada Z inversa

- Expansión en serie de potencias

Ejemplo:

$$X(z) = z^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - z^{-1}) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \quad C - \{0, \infty\}$$

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Ejemplo:

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n z^{-n}}{n} \quad |a| < |z|$$

$$x[n] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{a^k}{k} \delta[n-k] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases} = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1]$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

27

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4



Transformada Z inversa

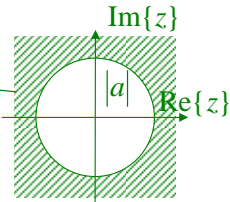
- Expansión en serie de potencias

Ejemplo:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 + az^{-1} \\ \hline az^{-1} \\ -az^{-1} + a^2z^{-2} \\ \hline a^2z^{-2} \\ \dots \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} 1 - az^{-1} \\ 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \end{array} \right.$$



$$\dots \quad x[n] = \delta[n] + a\delta[n-1] + a^2\delta[n-2] + \dots = a^n u[n]$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

28

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Opp: 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29



Transformada Z inversa

- Expansión en serie de potencias

Ejemplo:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots$$

Creciente

$$\frac{z}{-z+a^{-1}z^2} \quad \left| \begin{array}{l} -a+z \\ -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \end{array} \right.$$

$$\frac{a^{-1}z^2}{-a^{-1}z^2 + a^{-2}z^3} \quad \left| \begin{array}{l} -a+z \\ -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \end{array} \right.$$

$$\frac{a^{-2}z^3}{\dots} \quad \left| \begin{array}{l} -a+z \\ -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \end{array} \right.$$

$$\dots \quad x[n] = -a^{-1}\delta[n+1] - a^{-2}\delta[n+2] - \dots = -a^n u[-n-1]$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

29

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Pro: 3.12, 3.14*, 3.15, 3.19, 3.23

Resumen

- Definición de la Transformada Z
- Relación con la Transformada de Fourier
- Propiedades de la ROC
- Propiedades de la Transformada Z
- Algunas transformadas Z
- Transformada Z inversa:
 - Directa
 - Inspección
 - Expansión en serie de potencias

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

30

Problemas Opp: 3.49, 3.52, 3.53, 3.55, 3.56

Problemas Pro: 3.36

Tema 3 – Análisis de Sistemas LTI en el dominio transformado

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Oppenheim II (Cap. 5), Proakis (Cap. 4)

Probl Opp: 5.1, 5.6, 5.28, 5.29, 5.30, 5.33, 5.71

Probl Pro: 4.83*, 4.84, 4.92, 4.93

Introducción

- <http://video.google.es/videoplay?docid=6726953938324261715>

Filtros ideales

Filtros Paso Bajo (Low Pass Filters)

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad \xleftrightarrow{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{lp}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

Filtros Paso Alto (High Pass Filters)

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad \xleftrightarrow{0 < \omega_c < \pi} \quad h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$$

Son filtros no causales y con respuesta impulsional infinita.

Filtros realizables

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

Ejemplo:



$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{(1 + \frac{1}{2} z^{-1})(1 + \frac{3}{4} z^{-1})} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{5}{4} z^{-1} + \frac{3}{8} z^{-2}}$$

$$y[n] + \frac{5}{4} y[n-1] + \frac{3}{8} y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] - \frac{5}{4} y[n-1] - \frac{3}{8} y[n-2]$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

4

Ejercicio: Implementar este filtro y compararlo con la salida de la función filter de MATLAB

Filtros definidos por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias no define de forma única la respuesta al impulso del sistema. Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

sea $h'[n] = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n$ donde $\sum_{m=0}^N a_m p_k^{-m} = 0, A_k \in \mathbb{R}, p_i \neq p_j$, entonces



$$\sum_{k=0}^N a_k h'[n-k] = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^N a_k (h[n-k] + h'[n-k]) = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

Es decir, hay N coeficientes indeterminados A_k , que pueden ser fijados por medio de condiciones iniciales $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$ si es causal ó $y[1], y[2], \dots, y[N]$ si es anticausal.

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

5

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Pág 37, Opp II. Ejercicio: Comprobar que la suma justo a la derecha es efectivamente 0.

Probl Opp: 5.2, 5.7

Probl Pro: 4.45, 4.46, 4.91

Respuesta al impulso de un sistema racional

Expansión en fracciones parciales

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-k}} \longrightarrow h[n] = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n-k]}_{\text{FIR}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N A_k p_k^n u[n]}_{\text{IIR}}$$

sólo si $M \geq N$ Polos en el origen Polos fuera del origen

Ejemplo: $h[n] = a^n (u[n] - u[n - M - 1])$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-(M+1)}}{1 - a z^{-1}} \longrightarrow \begin{cases} p_k = \cancel{0}, 0, \dots, 0 (M+1) \\ z_k = \cancel{ae^{j\frac{2\pi}{M+1} \cdot 0}}, ae^{j\frac{2\pi}{M+1} \cdot 1}, \dots, ae^{j\frac{2\pi}{M+1} \cdot M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_k = a \\ z_k = \cancel{0} \end{cases}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.2 , Proakis 3.6

Probl Opp: 5.3* , 5.4

Probl Pro: 4.47, 4.48

Respuesta de un sistema racional

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

El sistema está inicialmente en reposo. No se producen cancelaciones polo-cero.

Polos del sistema Polos de la entrada

Respuesta natural Respuesta forzada

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n u[n] + \sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u[n]$$

Respuesta transitoria Régimen permanente

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

7

Bibliografía: Oppenheim 5.2 , Proakis 3.6

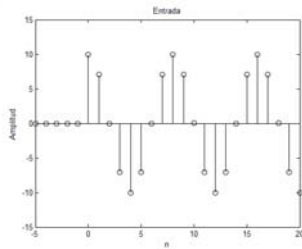
No todas las X se pueden expresar como un cociente. Pero supongamos que ésta sí. Si el sistema no estuviese inicialmente en reposo debería usarse la TZ unilateral.

Respuesta transitoria y régimen permanente

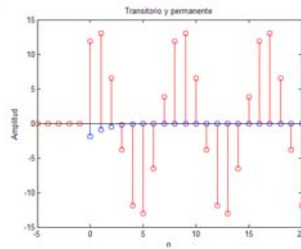
Ejemplo: $y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$ \longleftrightarrow $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$
 $x[n] = 10\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ \longleftrightarrow $X(z) = 10\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$

$$Y(z) = H(z)X(z) = 10\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{6.3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{11.894-13.015z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

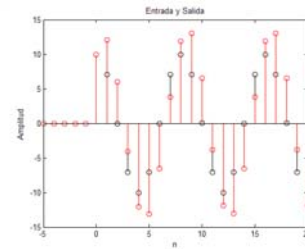
$$y[n] = -1.907(0.5)^n u[n] + 13.56\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right)u[n]$$



Curso 2009/2010



Carlos Oscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)



8

Bibliografía: Proakis 3.6, 4.4

Aquí se ve muy bien la respuesta transitoria y la permanente.

Probl Opp: 5.34

Probl Pro: 4.29 (** AQUÍ ME QUEDO), 4.31, 4.43

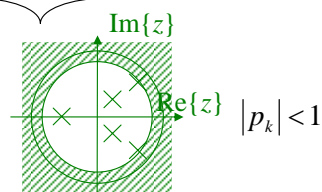
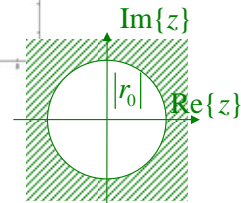
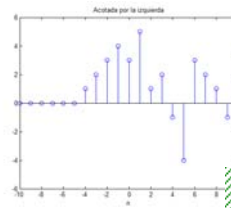
Estabilidad y causalidad

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]z^{-k}| \Big|_{|z|=1} < \infty$$



$h[n]$ es estable si la ROC de $H(z)$ incluye al círculo unidad.



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

9

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Para que un filtro definido por una ED sea causal y estable tiene que ser que todos los polos estén dentro del círculo unidad. Si no fuese causal por ejemplo, $h[n]=a \cdot \delta[n+1] + \delta[n]$ ($H(z)=az+1$), entonces tendría un polo en el infinito.

Probl Opp: 5.5*, 5.8, 5.9*, 5.10, 5.11

Probl Pro: 4.99, 4.104

Estabilidad

Ejemplo: $y[n] - y[n-1] = x[n]$

$x[n] = u[n]$ \longrightarrow La señal de entrada está acotada
 $\exists B_x : \forall n |x[n]| < B_x$
 $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$

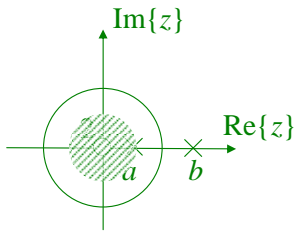
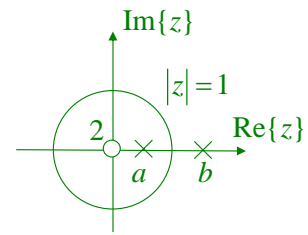
$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

$y[n] = (n+1)u[n]$ \longrightarrow Pero la salida, no
 $\neg \exists B_y : \forall n |y[n]| < B_y$

Estabilidad y Causalidad

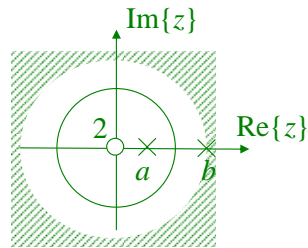
Ejemplo: $y[n] - (a+b)y[n-1] + aby[n-2] = x[n]$

$$H(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \quad a < 1 < b$$



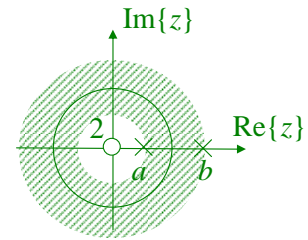
El sistema no es ni
causal ni estable

Curso 2009/2010



El sistema es causal
pero no estable

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)



El sistema es estable
pero no causal

11

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Probl Pro: 4.88

Cancelaciones polo-cero

Ejemplo: $y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] - 5x[n-1] + 6x[n-2]$

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} = \frac{\left(1 - 3z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$
$$= \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 - \frac{\frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

↑
Cancelación polo-cero

$$h[n] = \delta[n] - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

El sistema es estable debido a la cancelación polo-cero pero en una implementación real no tienen por qué cancelarse exactamente.

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Notación

Polinomio de orden m : $A_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k^{(m)} z^{-k} \quad a_0^{(m)} = 1$

Polinomio inverso o recíproco: $\tilde{A}_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^m a_{m-k}^{(m)} z^{-k}$

Test

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$



Curso 2009/2010

1. $A_N(z) = A(z)$

2. $m = N$

4. mientras $m \neq 0$

4.1. Calcular $\tilde{A}_m(z)$

4.2. $K_m = a_m^{(m)}$

4.3. $A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m \tilde{A}_m(z)}{1 - K_m^2}$

4.4. $m = m - 1$

$A(z)$ tiene todas sus raíces dentro del círculo unidad si y sólo si

$$\forall m \in \{1, 2, \dots, N\} : |K_m| < 1$$

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

13

Bibliografía: Proakis 3.6

Proakis pp 217

Ejercicio: Implementar este algoritmo

Test de estabilidad de Schür-Cohn

Ejemplo: $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$

$$A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$\tilde{A}_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$$

$$K_2 = a_2^{(2)} = -\frac{1}{2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2\tilde{A}_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \frac{7}{2}z^{-1}$$

$$\tilde{A}_1(z) = -\frac{7}{2} + z^{-1}$$

$$K_1 = a_1^{(1)} = -\frac{7}{2} \longrightarrow |K_1| > 1 \longrightarrow \text{El sistema no es estable}$$



Estabilidad de un sistema de 2º orden

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1, z_2 = 0 \\ p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -(p_1 + p_2) \\ a_2 = p_1 p_2 \end{array} \right.$$

Estabilidad $|K_i| < 1$

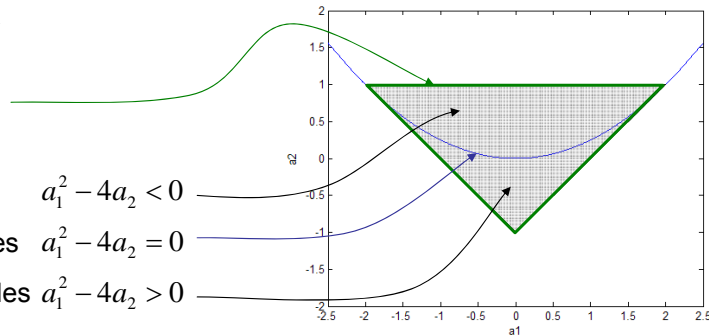
$$K_2 = a_2$$

$$K_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}$$

Polos complejos $a_1^2 - 4a_2 < 0$

Polos reales dobles $a_1^2 - 4a_2 = 0$

Polos reales simples $a_1^2 - 4a_2 > 0$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

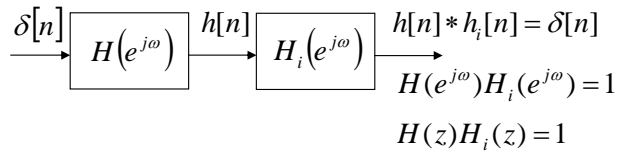
15

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Las condiciones de estabilidad que hemos dado definen una región en el plano de coeficientes (a_1, a_2 , ver figura) que tiene forma de triángulo. Es sistema es estable si y solo si el punto (a_1, a_2) está dentro de este triángulo, que se conoce como *triángulo de estabilidad*.

Las características del two-pole system dependen de la situación de sus polos, o, equivalentemente, de la situación del punto (a_1, a_2) en el triángulo de estabilidad. Los polos pueden ser reales o complejos conjugados, dependiendo del valor del discriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_2$. La parábola $a_2 = a_1^2/4$ divide el triángulo de estabilidad en dos regiones (ver figura). La región por debajo de la parábola ($a_1^2 > 4a_2$) corresponde a polos reales distintos. Los puntos que están en la parábola ($a_1^2 = 4a_2$) proporcionan dos polos reales iguales. Por último, los puntos por encima de la parábola resultan en polos complejos conjugados.

Invertibilidad



$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})} \longrightarrow H_i(z) = \frac{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}$$

Es decir, los polos de un sistema son los ceros de su sistema inverso, y los ceros de un sistema son los polos de su inverso. La ROC del sistema inverso debe solaparse con la del sistema $H(z)$

Un sistema LTI es estable y causal y tiene un sistema inverso estable y causal sii todos los polos y ceros de $H(z)$ están dentro del círculo unidad

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Probl Opp: 5.31, 5.32, 5.36, 5.59, 5.72, 5.73, 5.74, 5.75

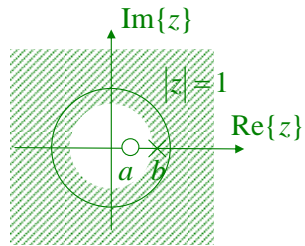
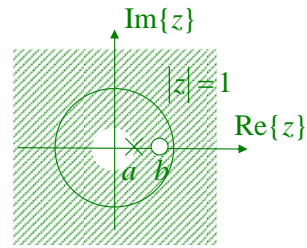
Probl Pro: 4.90

Invertibilidad

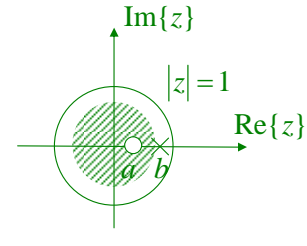
Ejemplo: $H(z) = \frac{1-bz^{-1}}{1-az^{-1}} \quad b, a < 1$

$$h[n] = a^n u[n] - ba^{n-1} u[n-1]$$

$$H_i(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$$



$$h[n] = b^n u[n] - ab^{n-1} u[n-1]$$



$$h[n] = -b^n u[-n-1] + ab^{n-1} u[-n-2]$$

Curso 2009/2010

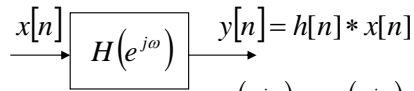
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

17

Bibliografía: Oppenheim 5.2, Proakis 3.6

Los dos pueden ser sistemas inversos porque los dos solapan con la ROC original. El problema del segundo sistema inverso es que no es estable. Ejercicio: comprobar que los dos son sistemas inversos.

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI



$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad |Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})|$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

Ejemplo: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0 \longrightarrow h[n] = \delta[n - n_0]$

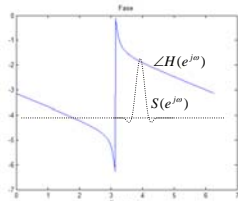
$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\phi_0 - \omega n_0 \longrightarrow y[n] \approx |H(e^{j\omega_0})| s[n - n_0] \cos(\omega_0(n - n_0) - \phi_0)$$

$$x[n] = s[n] \cos \omega_0 n$$

donde $n_0 = \tau(\omega)|_{\omega=\omega_0}$

Retardo de grupo

$$\tau(\omega) = \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\}$$



Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

18

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

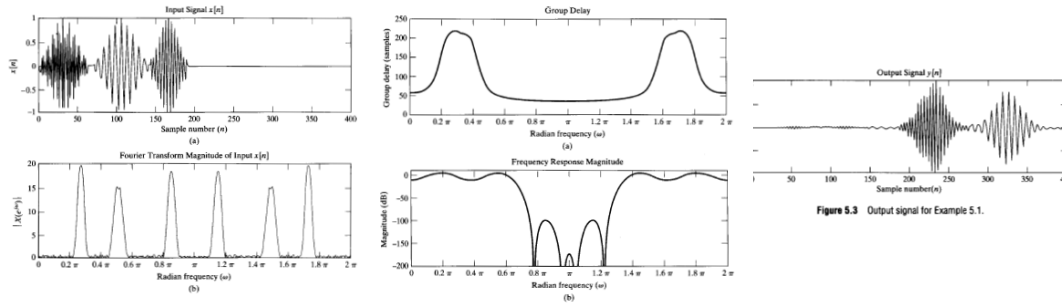
$S[n]$ una señal de banda estrecha. $\text{Arg}(\cdot)$ es la fase continua de $H(e^{j\omega})$. Cuanto más se aleje el retardo de grupo de una constante menos lineal es la fase del filtro.

Probl Opp: 5.21, 5.22, 5.25, 5.27, 5.47

Probl Pro: 4.41*, 4.42, 4.57, 4.59*, 4.89

Efectos del retardo de grupo

Ejemplo:



Entrada

Sistema

Salida

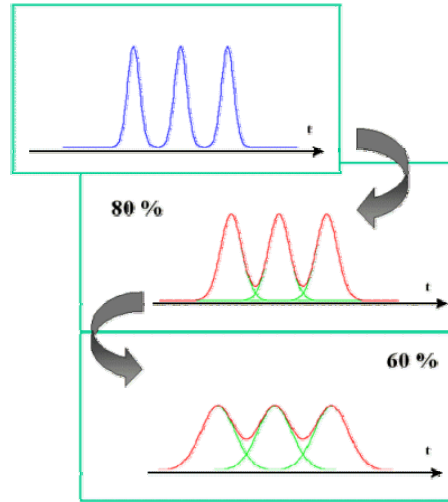
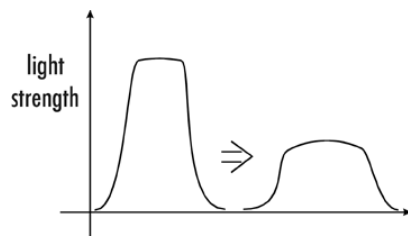
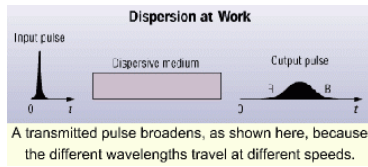
Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

19

Bibliografía: Oppenheim 5.1, 5.3

Efectos del retardo de grupo



Applet: <http://cnyack.homestead.com/files/afilt/afilt-phasegroup.htm>

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

20

Bibliografía: Oppenheim 5.1, 5.3

El pulso se ensancha porque las diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades.

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de amplitud

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k e^{-j\omega})}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_k e^{-j\omega})(1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k e^{-j\omega})(1 - p_k^* e^{j\omega})}$$

Ganancia del filtro en dBs

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=0}^M 20 \log_{10} |1 - z_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=0}^N 20 \log_{10} |1 - p_k e^{-j\omega}|$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

21

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.54, 4.79, 4.87, 4.106, 4.107, 4.108

El k=0 es k=1.

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Respuesta de fase

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{b_0}{a_0} \right) + \sum_{k=0}^M \angle(1 - z_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=0}^N \angle(1 - p_k e^{-j\omega}) = \underset{\substack{\text{Valor principal} \\ \downarrow}}{ARG}\{H(e^{j\omega})\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

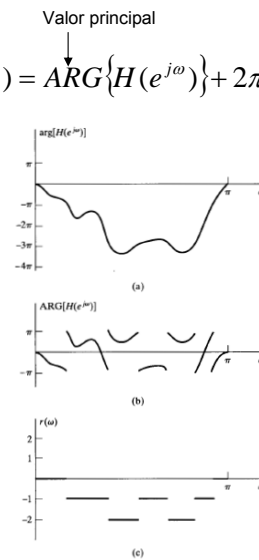
$$\pi < ARG\{H(e^{j\omega})\} = \arctan \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \leq \pi$$

$$r(\omega) \in \mathbb{N} \quad \text{Sin restricción}$$

$$\arg H(e^{j\omega}) = ARG\{H(e^{j\omega})\} + 2\pi r(\omega)$$

donde

$$r(\omega) \in \mathbb{N} \quad \text{Es tal que } \arg H(e^{j\omega}) \text{ es continua}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

22

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Retardo de grupo

$$\begin{aligned} \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} &= \sum_{k=0}^M \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - z_k e^{-j\omega}\} - \sum_{k=0}^N \frac{d}{d\omega} \arg\{1 - p_k e^{-j\omega}\} = \\ &= \sum_{k=0}^M \frac{|z_k|^2 - \text{Re}\{z_k e^{-j\omega}\}}{1 + |z_k|^2 - 2 \text{Re}\{z_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=0}^N \frac{|p_k|^2 - \text{Re}\{p_k e^{-j\omega}\}}{1 + |p_k|^2 - 2 \text{Re}\{p_k e^{-j\omega}\}} \end{aligned}$$



Propiedades

$$\text{grd}\{H(e^{j\omega})\} \equiv -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

salvo en las discontinuidades

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} - \arg\{H(e^{j0})\} = -\int_0^{\omega} \text{grd}\{H(e^{j\phi})\} d\phi$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

23

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

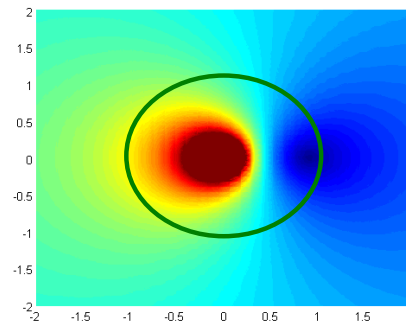
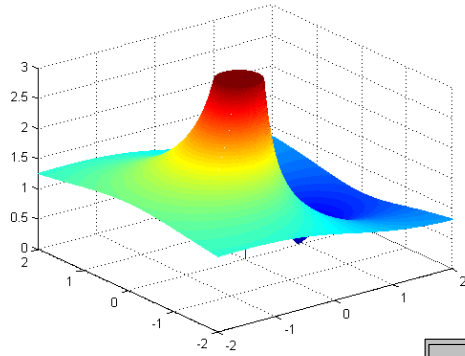
Ejercicio: cálculo de esta derivada

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

- Applet:
- <http://www.eas.asu.edu/~dsp/grad/anand/java/FreqResp/FreqResp.html>
- <http://www.thole.org/manfred/polezero/enidx.html>

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}$$
$$z_0 = 0.9$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

25

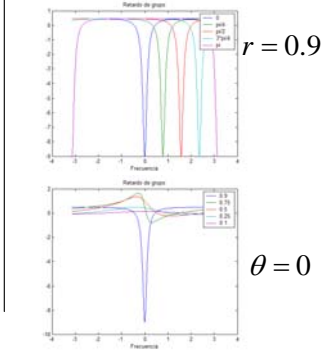
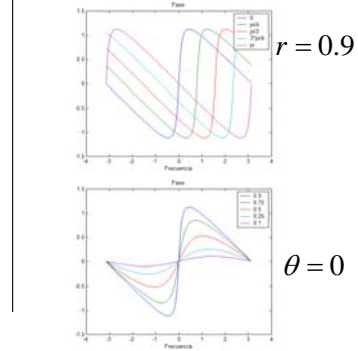
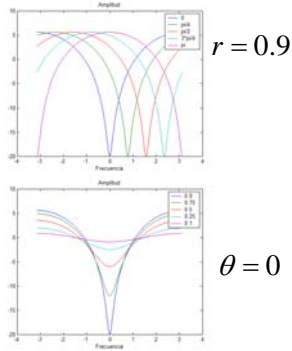
Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Ejercicio: Repetir estas gráficas

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(e^{j\omega}) = 1 - z_0 e^{-j\omega} = 1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta) \quad \text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = \arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|H(e^{j\omega})|^2}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

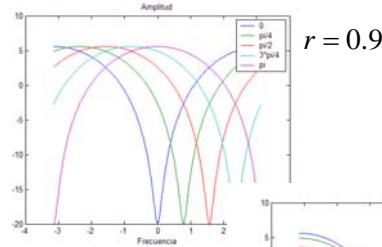
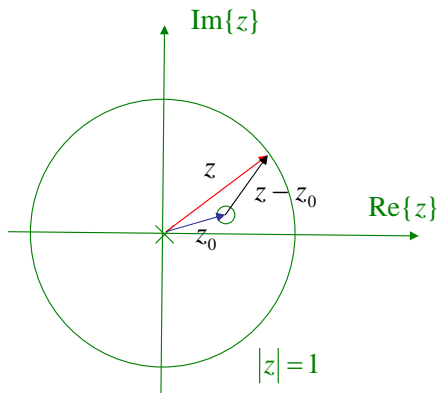
26

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

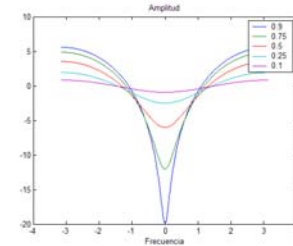
Probl Pro: 4.61*

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z) = 1 - re^{j\theta} z^{-1} = \frac{z - z_0}{z} \longrightarrow |H(z)| = \frac{|z - z_0|}{|z|} \longrightarrow |H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{|z|=1} = |e^{j\omega} - z_0|$$



$\theta = 0$



Curso 2009/2010

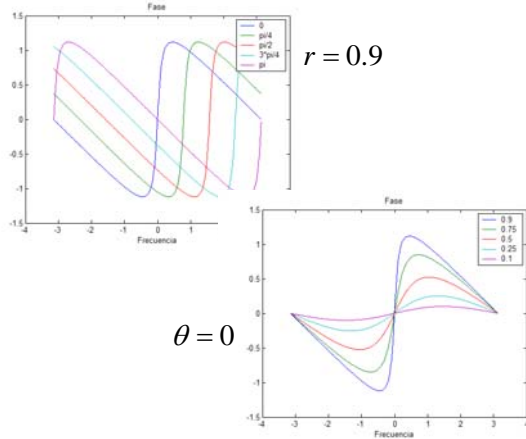
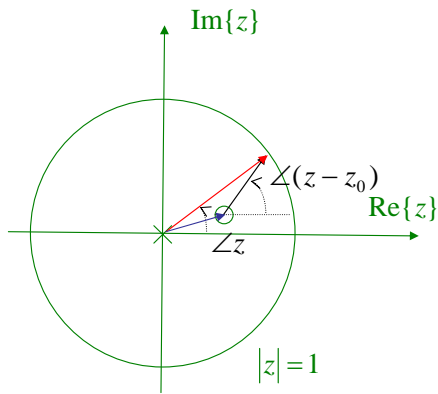
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

27

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

$$H(z) = \frac{z - z_0}{z} \longrightarrow \angle H(z) = \angle(z - z_0) - \angle z \longrightarrow \angle H(e^{j\omega}) = \angle(e^{j\omega} - z_0) - \omega$$



Curso 2009/2010

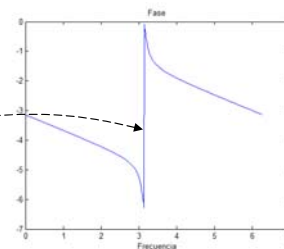
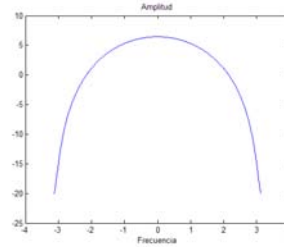
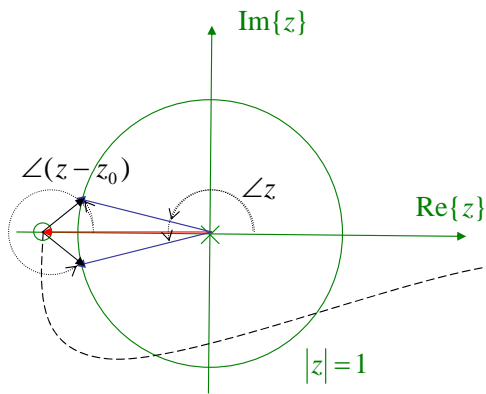
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

28

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo cero

Para $|z_0| \geq 1$ hay una discontinuidad en la fase



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

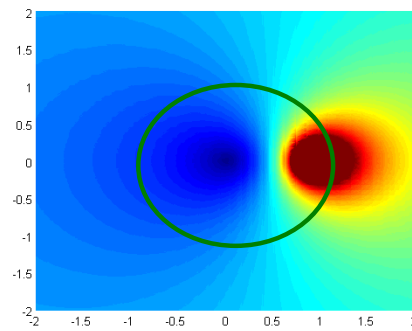
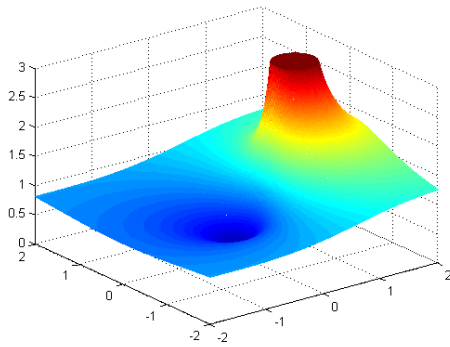
29

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.50

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

30

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Opp: 5.60

Probl Pro: 4.65, 4.66*

Respuesta en frecuencia de un sistema con un solo polo

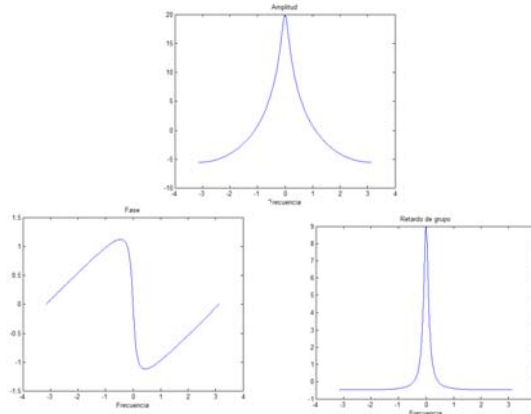
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z_0 e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)}$$

$$\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}$$

$$\text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{|H(e^{j\omega})|^2}$$

Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con un solo cero.



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

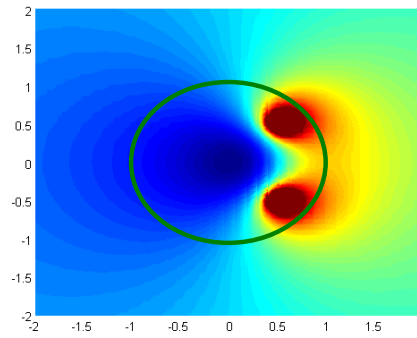
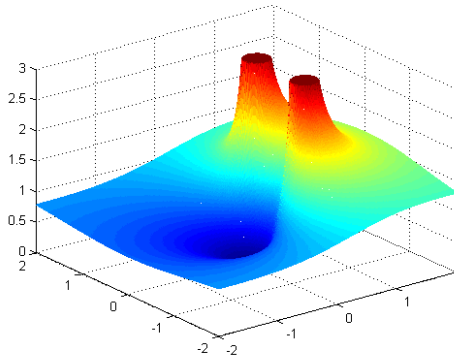
31

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.62

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - z_0 e^{-j\omega})(1 - z_0^* e^{-j\omega})} = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

32

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Opp: 5.26

Probl Pro: 4.56, 4.60, 4.67, 4.68*

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden IIR

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} \right) \left(\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)} \right)$$

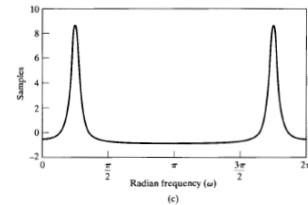
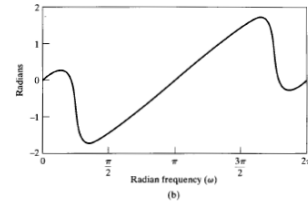
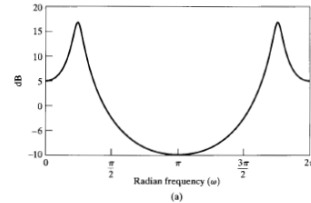
$$\text{ARG}\{H(e^{j\omega})\} = -\arctan \frac{r \sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)} - \arctan \frac{r \sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}$$

$$\text{grad}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{r^2 - r \cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} - \frac{r^2 - r \cos(\omega+\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)}$$

Los valores obtenidos son los opuestos a los obtenidos con dos ceros.

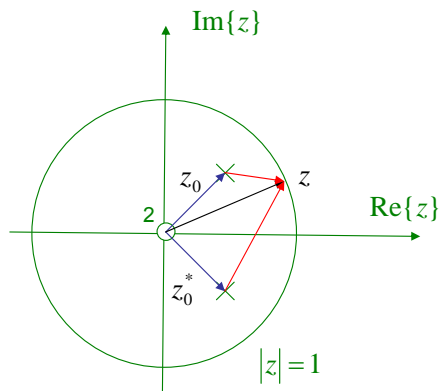
Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzan
(EPS-San Pablo CEU)



Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden



$$|H(z)| = \frac{|z|^2}{|z - z_0||z - z_0^*|}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_0||e^{j\omega} - z_0^*|}$$

Curso 2009/2010

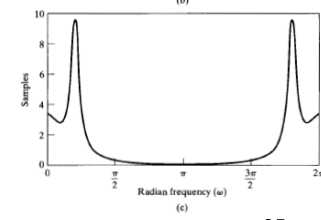
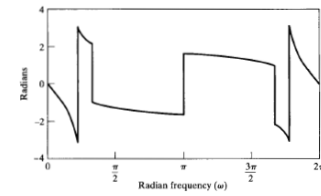
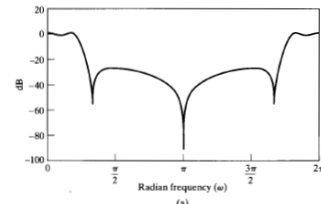
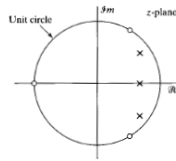
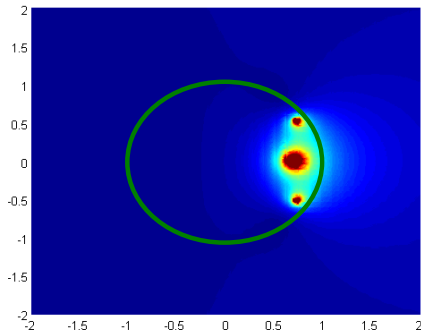
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

34

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Respuesta en frecuencia de un sistema racional

Ejemplo:
$$H(z) = \frac{0.05634(1+z^{-1})(1-1.0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.4461z^{-1}+0.7957z^{-2})}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

35

Bibliografía: Oppenheim 5.3, Proakis 4.4

Probl Pro: 4.49, 4.51*, 4.53, 4.63, 4.64

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

En general, no hay ninguna relación entre magnitud y fase para un sistema LTI. Sin embargo, si el sistema está definido por una ED, una vez especificada una de ellas, la otra queda determinada dentro de un número reducido de opciones.

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}} = C(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} [1]$$

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^M (1 - z_k^* z)}{a_0 \prod_{k=0}^N (1 - p_k^* z)}$$

$$C(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z)}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z)}$$

Polos $p_k, (p_k^*)^{-1}$
 Ceros $z_k, (z_k^*)^{-1}$

Si uno está dentro del círculo unidad, el otro debe estar fuera. Los polos de un sistema estable y causal están automáticamente determinados, pero no así los ceros.

Curso 2009/2010


Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

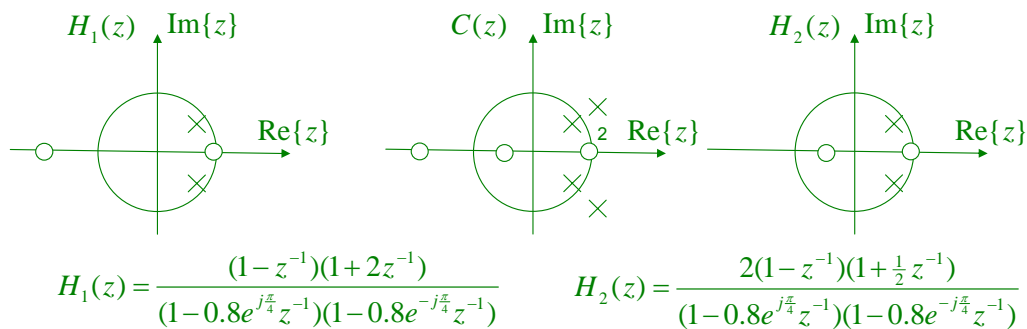
36

Bibliografía: Oppenheim 5.4

Relación entre fase y magnitud para sistemas definidos por una ED

Ejemplo: $C(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})(1-z)(1+2z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$

 $= \frac{2(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})2(1-z)(1+\frac{1}{2}z)}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z)(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z)}$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

37

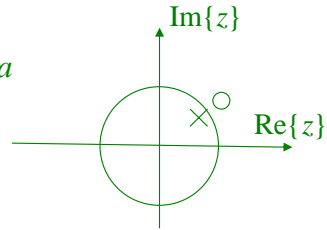
Bibliografía: Oppenheim 5.4

Ejercicio: Calcular la respuesta de fase y de amplitud

Sistemas paso-todo

Ejemplo:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \longrightarrow z_1 = \frac{1}{a^*} \quad p_1 = a$$



$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = \left| e^{-j\omega} \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = |e^{-j\omega}| \left| \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = 1$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

38

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Ejercicio: Calcular la fase y el retardo de grupo

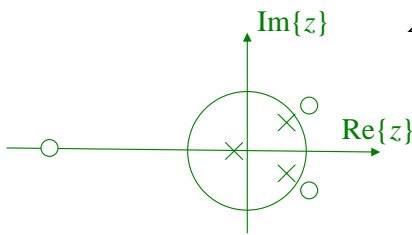
Sistemas paso-todo

Sistema paso todo de respuesta real

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - c_k^*}{1 - c_k^* z^{-1}} \frac{z^{-1} - c_k}{1 - c_k z^{-1}} \quad a_k \in \mathbb{R}, c_k \in \mathbb{C}$$

$$2M_c + M_r \text{ polos y ceros } z_r = \frac{1}{a_k} \quad p_r = a_k \quad z_c = \frac{1}{c_k^*}, \frac{1}{c_k} \quad p_c = c_k, c_k^*$$

$$\boxed{|H_{ap}(e^{j\omega})| = A}$$



$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{M_r} \left(-\omega - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega - \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \theta_k)} \right) + \sum_{k=1}^{M_c} \left(-2\omega - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega - \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega - \theta_k)} - 2 \arctan \frac{r_k \sin(\omega + \theta_k)}{1 - r_k \cos(\omega + \theta_k)} \right)$$

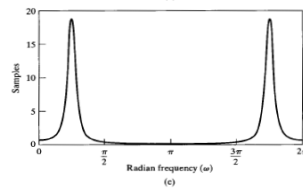
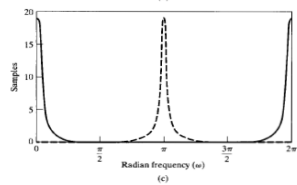
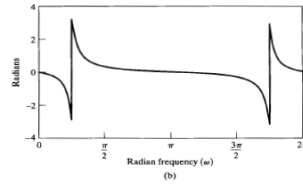
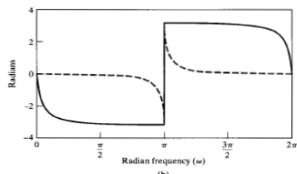
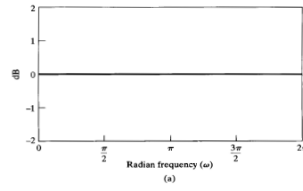
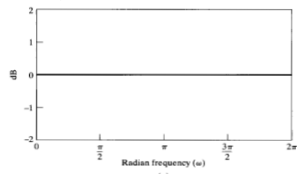
Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

39

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Sistemas paso-todo



Curso 2009/2010

Carlos Oscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

40

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Sistemas paso-todo

$$\boxed{\text{grad}H_{ap}(e^{j\omega})} = \sum_{k=1}^{M_r} \underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} \right)}_{>0} + \sum_{k=1}^{M_c} \underbrace{\left(\frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} + \frac{1-r_k^2}{|1-r_k e^{-j\theta_k} e^{-j\omega}|^2} \right)}_{>0} \boxed{>0}$$

Sistema causal y estable $\Rightarrow |r_k| < 1$

$$H_{ap}(e^{j0}) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{1-a_k}{1-a_k} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{1-c_k^*}{1-c_k} \frac{1-c_k}{1-c_k^*} = A \Rightarrow \angle H_{ap}(e^{j0}) = 0$$

$$\boxed{\arg\{H_{ap}(e^{j\omega})\}} = \arg\{H_{ap}(e^{j0})\} - \int_0^{\omega} \text{grad}\{H_{ap}(e^{j\phi})\} d\phi \boxed{<0}$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

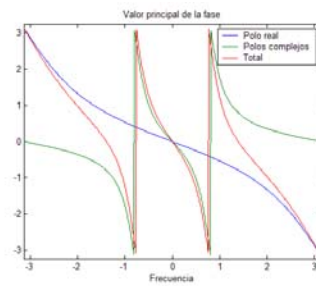
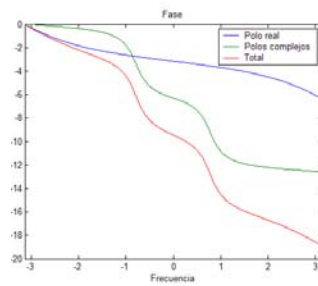
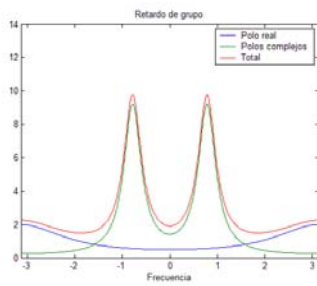
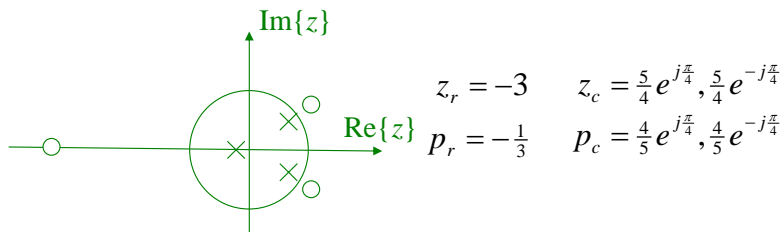
41

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Usos: Compensadores de fase; convertir filtros paso bajo en paso banda o paso alto; filtros de fase mínima

Probs Opp: 5.13, 5.24*

Sistemas paso-todo



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

42

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Sistemas de fase mínima

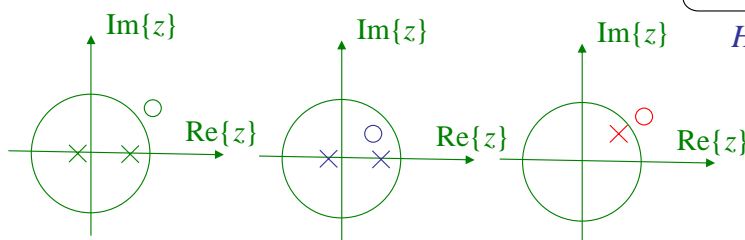
Un sistema es de fase mínima si todos sus polos y ceros están en el interior del círculo unidad.

Descomposición de un sistema LTI causal y estable

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

Supongamos que $H(z)$ tiene un cero fuera del círculo unidad en $z = \frac{1}{c^*}; |c| < 1$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{H_{\min}(z)} \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{H_{ap}(z)}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

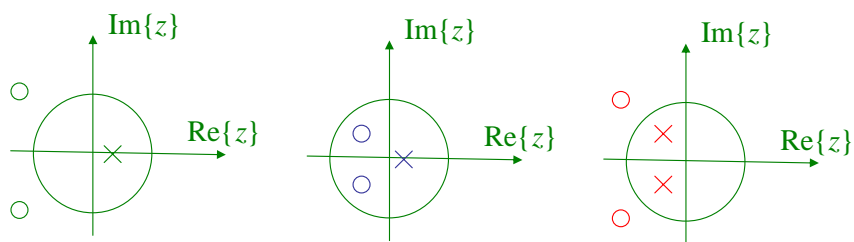
43

Bibliografía: Oppenheim 5.5

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{(1 - \frac{3}{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1})(1 - \frac{3}{2}e^{-j\frac{5\pi}{4}}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \stackrel{(1-z_0z^{-1})(1-z_1z^{-1}) = z_0z_1(z^{-1}-z_0^{-1})(z^{-1}-z_1^{-1})}{=} \frac{\frac{9}{4}(z^{-1} - \frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}})(z^{-1} - \frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \\
 &= \frac{\frac{9}{4}(1 - \frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}}z^{-1})(1 - \frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \frac{(z^{-1} - \frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}})(z^{-1} - \frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}})}{(1 - \frac{2}{3}e^{-j\frac{5\pi}{4}}z^{-1})(1 - \frac{2}{3}e^{j\frac{5\pi}{4}}z^{-1})}
 \end{aligned}$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

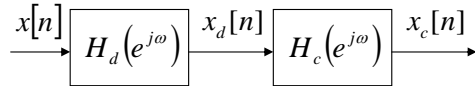
44

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Probl Opp: 5.54

Sistemas de fase mínima

Compensación de la respuesta frecuencial



Caso Particular: $H_d(e^{j\omega})$ es de fase mínima, causal y estable

Se puede diseñar un sistema causal y estable tal que $x_c[n] = x[n]$

Caso General:

Se puede compensar la amplitud pero no la fase.

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{d\min}(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}) \longrightarrow H_c(e^{j\omega}) = H_{d\min}^{-1}(e^{j\omega})$$

$$X_c(e^{j\omega}) = H_{ap}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

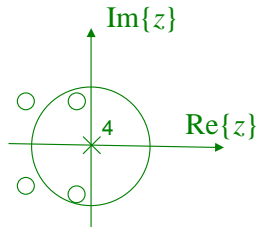
Bibliografía: Oppenheim 5.6

Probl Opp: 5.37

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:

$$H_d(z) = \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)$$



$$H_d(z) = \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \frac{25}{16} \left(z^{-1} - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi}\right) \left(z^{-1} - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi}\right) =$$

$$H_d(z) = \frac{25}{16} \left(1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1}\right) \frac{\left(1 - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{4}{5} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{4}{5} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1}\right)} =$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

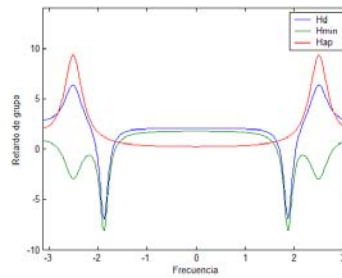
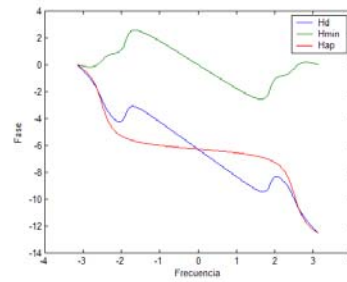
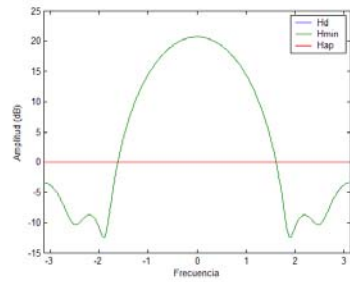
46

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Éste es un sistema FIR, estable y causal

Sistemas de fase mínima

Ejemplo:



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

47

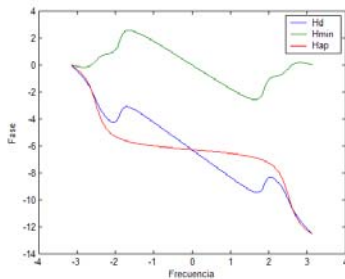
Bibliografía: Oppenheim 5.6

Ejercicio: Repetir estas gráficas

Ejercicio: Diseñar el sistema de compensación y estudiar su estabilidad, causalidad, etc. Dibujar su respuesta de amplitud, fase y respuesta al impulso.

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Fase (phase-lag) mínima



$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\arg\{H(z)\} = \arg\{H_{\min}(z)\} + \arg\{H_{ap}(z)\} < 0$$

$$phase-lag\{H(z)\} = -\arg\{H(z)\}$$

Luego,

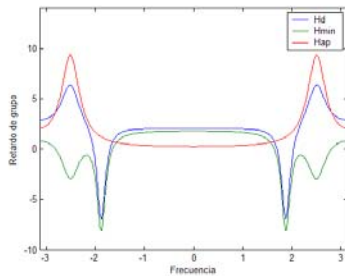
$$phase-lag\{H_{\min}(z)\} < phase-lag\{H(z)\}$$

Hay que tener cuidado con que $H_{\min}(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0$ porque

$h[n]$ y $-h[n]$ tienen los mismos polos y ceros pero un desfase de π

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de grupo mínimo



$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

$$\text{grd}\{H(z)\} = \text{grd}\{H_{\min}(z)\} + \text{grd}\{H_{ap}(z)\} > 0$$

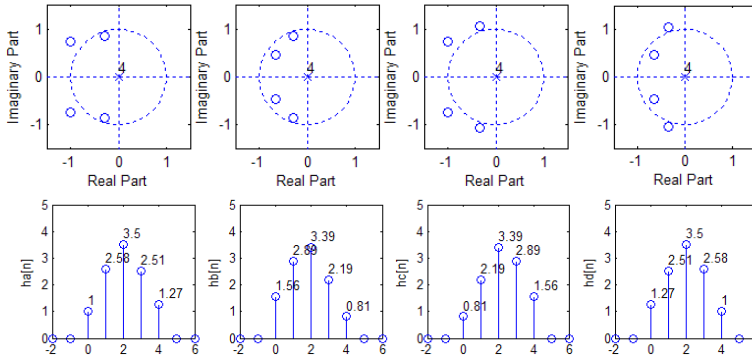
Luego, $\text{grd}\{H_{\min}(z)\} < \text{grd}\{H(z)\}$

Propiedades de los sistemas de fase mínima

$$H_d(z) = (1 - \frac{9}{10} e^{j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{9}{10} e^{-j\frac{3}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{5}{4} e^{j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})(1 - \frac{5}{4} e^{-j\frac{4}{5}\pi} z^{-1})$$

Retardo de energía mínimo

Ejemplo: $|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$



$$|h[0]| \leq |h_{\min}[0]|$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

50

Bibliografía: Oppenheim 5.6

Todos estos sistemas tienen la misma respuesta en amplitud

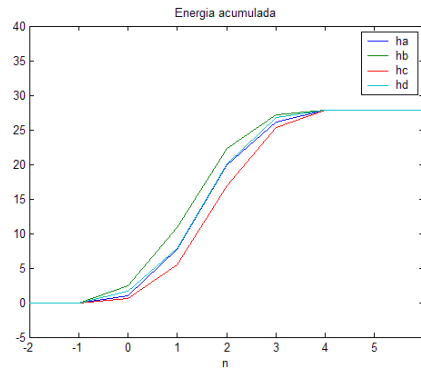
Probl Opp: 5.39, 5.61, 5.62, 5.63

Propiedades de los sistemas de fase mínima

Retardo de energía mínimo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{\min}[n]|^2 \quad \text{pero} \quad \sum_{k=-\infty}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^n |h_{\min}[k]|^2$$

Ejemplo:



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

51

Bibliografía: Oppenheim 5.6

La energía de hmin es la misma que las de h por el Tma. de Parseval.

Probl Opp: 5.17*, 5.18, 5.65, 5.66, 5.67

Probl Pro: 4.85, 4.94, 4.98, 4.101*, 4.102, 4.103*

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \quad |\omega| < \pi \longrightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha & |\omega| < \pi \\ \text{grd}\{H(e^{j\omega})\} = \alpha \\ h[n] = \sin c(n - \alpha) & \alpha \in \mathcal{R} \\ h[n] = \delta[n - \alpha] & \alpha \in \mathcal{Z} \end{cases}$$

En general, un sistema de fase lineal es tal que $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}$.

$h[n]$ es simétrica respecto a α si 2α es un entero, es decir, $h[2\alpha - n] = h[n]$

Si α es entero, entonces existe un sistema de fase 0 que es una versión desplazada de $h[n]$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

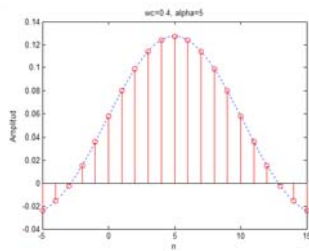
Para sistemas causales no se puede conseguir fase 0 (par). Pero nos gustaría que por lo menos sea una fase lineal que tiene un retardo de grupo constante.

Probl Opp: 5.35, 5.49

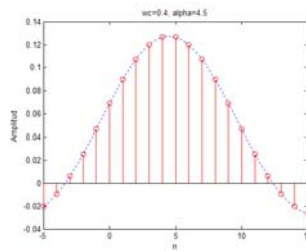
Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Ejemplo:

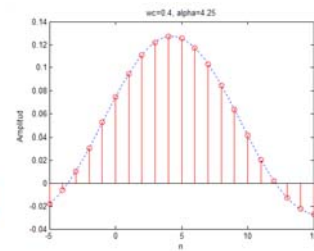
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| < \pi \end{cases} \longleftrightarrow h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \sin c \left(\frac{\omega_c}{\pi} (n - \alpha) \right)$$



Curso 2009/2010



Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)



53

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\alpha} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j(\omega\alpha - \beta)} : A(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$$

Fase lineal Fase lineal generalizada (GLP)

Ejemplo: $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| < \pi \end{cases}$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin\left(\frac{M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T_s} \quad |\omega| < \pi$$

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |A(e^{j\omega})| \\ \angle H(e^{j\omega}) &= \beta - \omega\alpha + \angle A(e^{j\omega}) \\ & \quad |\omega| < \pi \end{aligned}$$

$$\text{grad}\{H(e^{j\omega})\} = \alpha$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

54

Bibliografía: Oppenheim 5.7

H1 es un filtro paso bajo con retardo. H2 es un moving average de tamaño M y retardado M/2 para que sea causal. Diferenciador de tiempo continuo implementado en tiempo discreto. El retardo de grupo es constante pero para ello hay que obviar las discontinuidades introducidas por la fase de $A(e^{j\omega})$

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Si $\forall \omega: \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin(\omega(n-\alpha) + \beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $\beta \in \{0, \pi\}, 2\alpha \in \mathbb{Z}, h[2\alpha - n] = h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es par

Si $\beta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}, 2\alpha \in \mathbb{Z}, h[2\alpha - n] = -h[n]$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es impar

Un sistema de fase 0 tiene todos sus polos y ceros en pares recíprocos conjugados.

Un sistema de fase lineal generalizada es un sistema de fase cero con polos o ceros adicionales en $z = 0, \pm 1, \infty$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

55

Bibliografía: Oppenheim 5.7

La segunda condición es la que habíamos impuesto a los sistemas de fase lineal

Probl Opp: 5.15*, 5.16, 5.20, 5.50, 5.51, 5.69

Probl Pro: 4.100*

Sistemas lineales de fase lineal generalizada

Sistemas de fase lineal generalizada causales

Si $\forall \omega: \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \sin(\omega(n - \alpha) + \beta) = 0$, entonces el sistema es GLP

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real y par. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$

Si $h[n]$ es FIR, causal y $h[n] = \begin{cases} -h[M - n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, entonces el sistema es GLP y $A(e^{j\omega})$ es real e impar. $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\omega\frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})}$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Existen sistemas IIR que son causales y GLP, pero no se pueden expresar como un cociente de polinomios, y por lo tanto, no se pueden implementar como una ecuación en diferencias

Probl Opp: 5.40, 5.41, 5.42, 5.43, 5.44, 5.48, 5.53

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} = h[\frac{M}{2}]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} (h[n]e^{-j\omega n} + h[M-n]e^{-j\omega(M-n)}) = \\ &= h[\frac{M}{2}]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]e^{-j\omega\frac{M}{2}} (e^{j\omega(\frac{M}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{M}{2}-n)}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(h[\frac{M}{2}] + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n] \cos(\omega(\frac{M}{2}-n)) \right) \\ &= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(h[\frac{M}{2}] + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[\frac{M}{2}-k] \cos(\omega k) \right) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}} \end{aligned}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^M h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=0}^M h[k]z^{k-M} = z^{-M} H(z^{-1})$$

$$\text{Si } H(z_0) = 0, \text{ entonces } H(z_0^{-1}) = 0$$

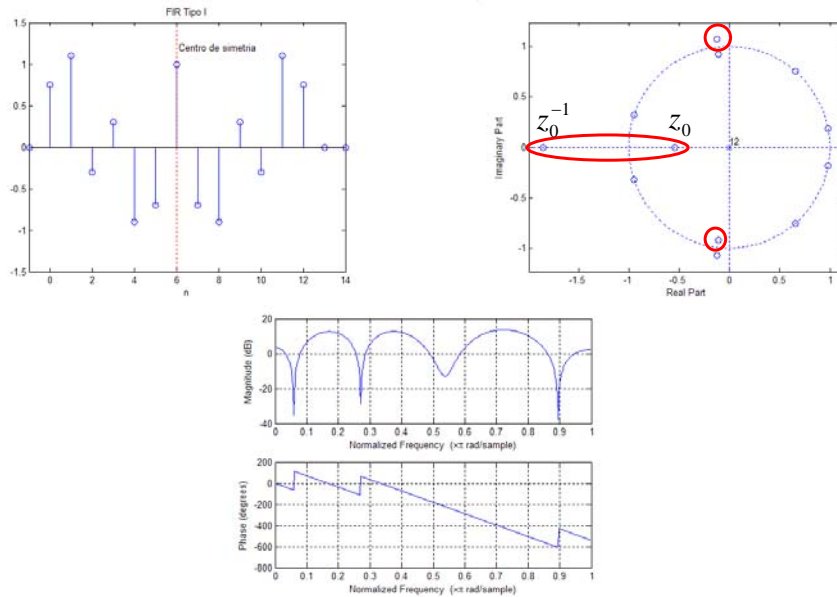
Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

57

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Sistemas de fase lineal FIR de tipo I



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

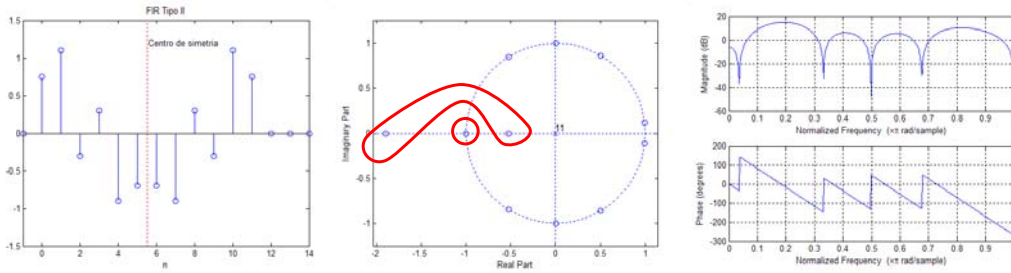
58

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Sistemas de fase lineal FIR de tipo II

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m+1$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\frac{M-1}{2}-k] \cos(\omega(k-\frac{1}{2}))$$



$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1}) \xrightarrow{z=-1} H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

59

Bibliografía: Oppenheim 5.7

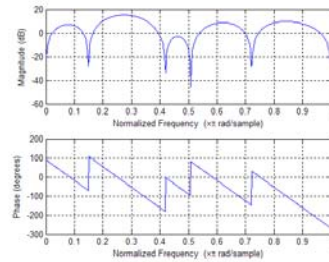
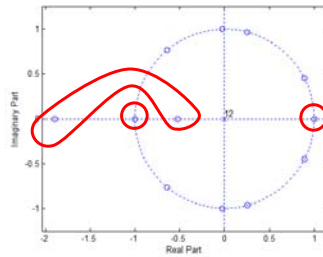
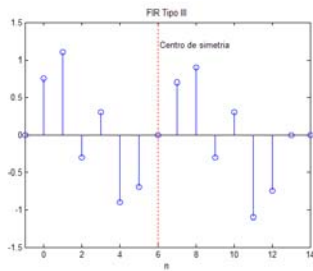
El cero en -1 es una cosa característica de estos filtros. $H(z)=z^M H(z^{-1})$ viene del tipo I pero el desarrollo es el mismo para el tipo II. Ejercicio: calcular la TF

Probl Opp: 5.52

Sistemas de fase lineal FIR de tipo III

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} 2h[\frac{M}{2}-k] \sin(\omega k)$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

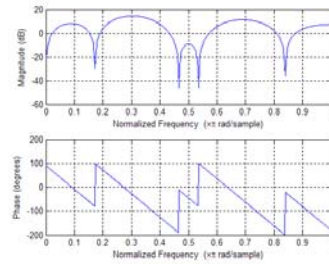
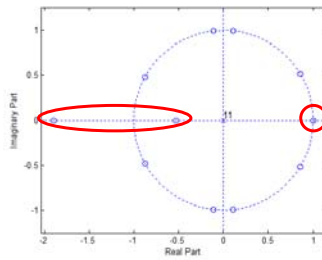
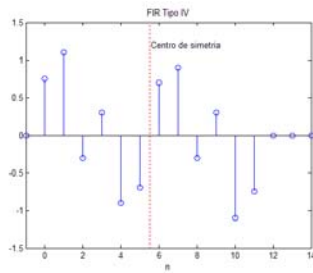
60

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Sistemas de fase lineal FIR de tipo IV

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m+1$$

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} 2h[\frac{M-1}{2}-k] \sin(\omega(k - \frac{1}{2}))$$



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

61

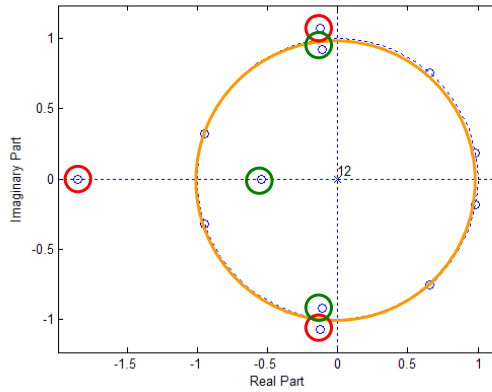
Bibliografía: Oppenheim 5.7

Probl Opp: 5.23, 5.56, 5.70

Probl Pro: 4.78

Descomposición de un sistema FIR

$$H(z) = k H_{\min}(z) H_{\text{circ}}(z) H_{\max}(z)$$



$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i}$$

M_i es el número de ceros de $H_{\min}(z)$

$$\begin{aligned} |H_{\max}(e^{j\omega})| &= |H_{\min}(e^{-j\omega})| = \\ &= |H_{\min}(e^{j\omega})| \end{aligned}$$

$$k = \frac{h[0]}{\prod |z_{\min}|}$$

Bibliografía: Oppenheim 5.7

h_{\max} es el flipr de h_{\min} (todo en el dominio del tiempo)

Descomposición de un sistema FIR

Ejemplo:

$$h[n] = 0.75\delta[n] + 1.1\delta[n-1] - 0.3\delta[n-2] + 0.3\delta[n-3] - 0.9\delta[n-4] - 0.7\delta[n-5] \\ + \delta[n-6]$$

$$+ 0.75\delta[n-7] + 1.1\delta[n-8] - 0.3\delta[n-9] + 0.3\delta[n-10] - 0.9\delta[n-11] - 0.7\delta[n-12]$$

$$H_{\min}(z) = (1 + 0.5412z^{-1})(1 - 0.9242e^{j1.6881}z^{-1})(1 - 0.9242e^{-j1.6881}z^{-1})$$

$$h_{\min}[n] = \delta[n] + 0.7574\delta[n-1] + 0.9711\delta[n-2] + 0.4622\delta[n-3]$$

$$H_{\max}(z) = (0.9242^2 \cdot 0.5412)(1 + 1.8479z^{-1})(1 - 1.0821e^{j1.6881}z^{-1})(1 - 1.0821e^{-j1.6881}z^{-1})$$

$$h_{\max}[n] = 0.4622\delta[n] + 0.9711\delta[n-1] + 0.7574\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$H_{\text{circ}}(z) = (1 + e^{j0.1852}z^{-1})(1 + e^{-j0.1852}z^{-1})(1 + e^{j0.8512}z^{-1})(1 + e^{-j0.8512}z^{-1})(1 + e^{j2.8118}z^{-1})(1 + e^{-j2.8118}z^{-1})$$

$$k = \frac{0.75}{0.9242^2 \cdot 0.5412}$$

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

63

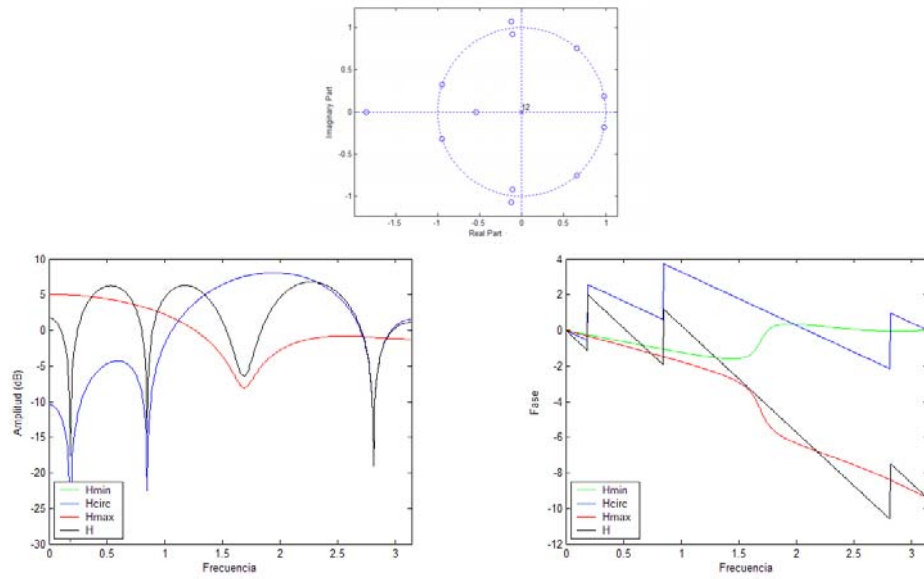
Bibliografía: Oppenheim 5.7

El 1/6.9034 de Hmax es para hacer que tenga ganancia 1 a frecuencia 0. 6.9034 es la suma de todos los coeficientes de hmax

Probl Opp: 5.12*, 5.38, 5.45, 5.46, 5.64

Probl Pro: 4.109*

Descomposición de un sistema FIR



Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

64

Bibliografía: Oppenheim 5.7

Resumen

- Filtros definidos por un sistema racional
- Propiedades (estabilidad, causalidad, invertibilidad)
- Retardo de grupo
- Respuestas tipo: 1 cero, 1 polo, 2 polos
- Relación magnitud-fase
- Sistemas paso-todo
- Sistemas de fase mínima
- Sistemas de fase lineal generalizada
 - Filtros FIR

Curso 2009/2010

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

65

Probl Opp: 5.58, 5.68

Probl Pro: 4.95, 4.97, 4.105

Tema 4 – Estructuras de filtros digitales

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Oppenheim II (Cap. 6)

Proakis (Cap. 7)

Contenido

- Estructuras IIR
- Estructuras FIR
- Cuantización de coeficientes

¿Por qué?

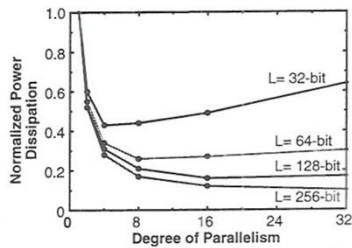


Figure 3. Power Consumption vs. degree of parallelism.

- Reducción consumo de potencia
- Reducción del área de silicio
- Aumento de la velocidad de cálculo

Table 2. power consumption of digital FIR filter circuit

digital filter	power consumption(mW)
16bit coefficient	196.8
8bit coefficient	112.8
optimized bitwidth	33.9

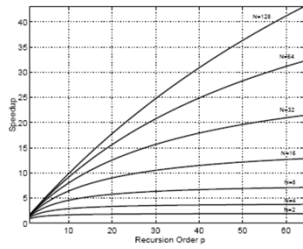


Fig. 3. Speedup vs. Filter Order p for different number of data paths N .

Table 3. circuit area of digital FIR filter circuit

digital filter	circuit area(μm^2)
16bit coefficient	555501
8bit coefficient	264194
optimized bitwidth	181710

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

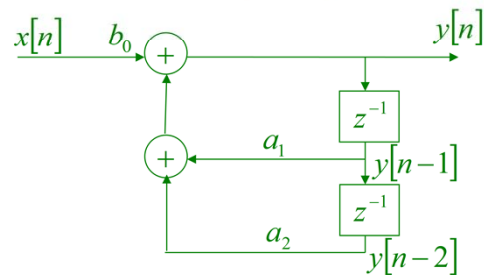
3

Leer Muhammad1999, Chandrakasan, Tarumi2003 y Robelly2004

Representación de filtros EDCC en diagrama de bloques

Ejemplo: $y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

4

Bibliografía: Oppenheim 6.1, Proakis 7.1

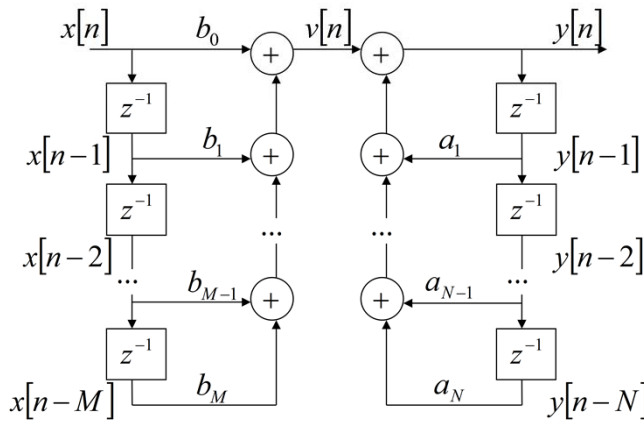
Representación de filtros definidos por ED de coefs. constantes en diagrama de bloques

Problemas Opp: 6.1*, 6.2*, 6.3, 6.4, 6.5*, 6.8, 6.9, 6.12, 6.21, 6.24, 6.31, 6.32*

Problemas Pro: 7.3, 7.4, 7.6, 7.7, 7.10, 7.19

Forma directa I

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longleftrightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$



$$\begin{aligned} V(z) &= B(z)X(z) \\ Y(z) &= \frac{1}{A(z)}V(z) \\ &= \frac{1}{A(z)}B(z)X(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v[n] &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \\ y[n] &= \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n] \end{aligned}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

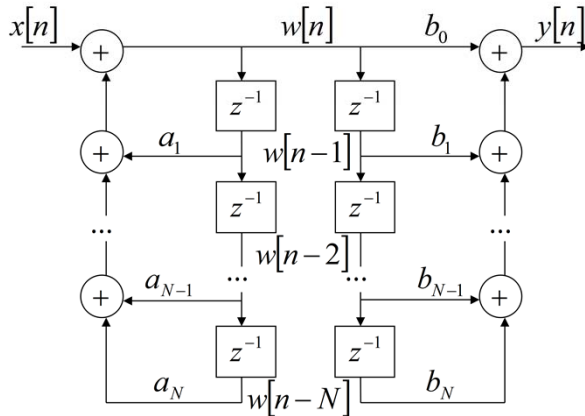
5

Bibliografía: Oppenheim 6.3 y 6.5, Proakis 7.2 y 7.3

Problemas Opp: 6.13

Forma intermedia I y II

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longleftrightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$



$$W(z) = \frac{1}{A(z)} X(z)$$

$$Y(z) = B(z)W(z) = B(z) \frac{1}{A(z)} X(z)$$

$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]$$

Curso 2012/2013

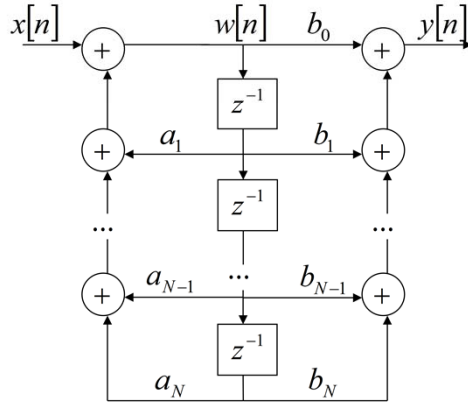
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

6

Bibliografía: Oppenheim 6.3 y 6.5, Proakis 7.2 y 7.3

Forma directa II o forma canónica

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longleftrightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$



$$W(z) = \frac{1}{A(z)} X(z)$$

$$Y(z) = B(z)W(z) = B(z) \frac{1}{A(z)} X(z)$$

$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

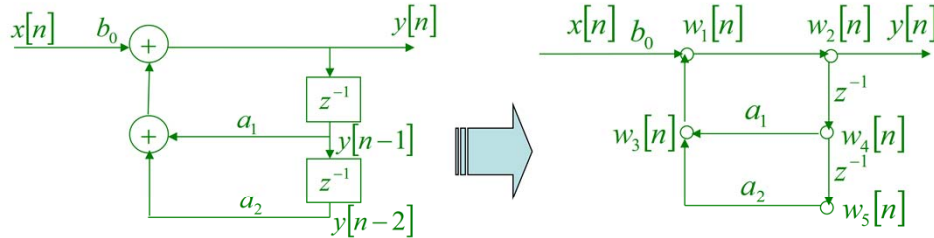
7

Bibliografía: Oppenheim 6.3 y 6.5, Proakis 7.2 y 7.3

Problemas Opp: 6.7, 6.14*, 6.15, 6.25

Representación con grafos

Ejemplo:



$$\begin{aligned} w_1[n] &= b_0 x[n] + w_3[n] \\ w_2[n] &= w_1[n] \\ w_3[n] &= a_1 w_4[n] + a_2 w_5[n] \\ w_4[n] &= w_2[n-1] \\ w_5[n] &= w_4[n-1] \\ y[n] &= w_2[n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1(z) &= b_0 X(z) + W_3(z) \\ W_2(z) &= W_1(z) \\ W_3(z) &= a_1 W_4(z) + a_2 W_5(z) \\ W_4(z) &= z^{-1} W_2(z) \\ W_5(z) &= z^{-1} W_4(z) \\ Y(z) &= W_2(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= W_2(z) = W_1(z) = \\ &= b_0 X(z) + W_3(z) = \\ &= b_0 X(z) + a_1 W_4(z) + a_2 W_5(z) = \\ &= b_0 X(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

8

Bibliografía: Oppenheim 6.2, Proakis 7.2 y 7.3

Un nodo representa un sumador o una ramificación.

Implementación C++

```
// Allocate memory
double w_n[5];
double w_n_1[5];
double a[2], b[1];

// Initialize filter
get_filter(a,b);

// Initial conditions
for (int i=0; i<5; i++) w_n[i]=w_n_1[i]=0.0;

 $w_1[n] = b_0 x[n] + w_3[n]$ 
 $w_2[n] = w_1[n]$ 
 $w_3[n] = a_1 w_4[n] + a_2 w_5[n]$ 
 $w_4[n] = w_2[n-1]$ 
 $w_5[n] = w_4[n-1]$ 
 $y[n] = w_2[n]$ 

// Filter
while (true) {
    // Compute current output
    double x=get_current_sample();
    w_n[0]=b[0]*x+w_n[2];
    w_n[1]=w_n[0];
    w_n[2]=a[0]*w_n[3]+a[1]*w_n[4];
    w_n[3]=w_n_1[1];
    w_n[4]=w_n_1[3];
    double y=w_n[2];
    put_current_sample(y);

    // Prepare for next iteration
    w_n_1[1]=w_n[1];
    w_n_1[3]=w_n[3];
}
```

Curso 2012/2013

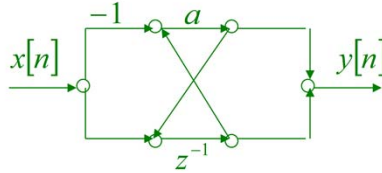
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

9

Bibliografía: Oppenheim 6.2, Proakis 7.2 y 7.3

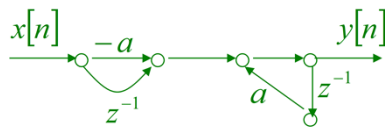
Representación con grafos

Ejemplo:

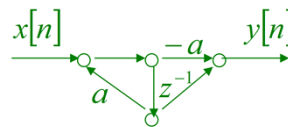


$$H(z) = \frac{-a + z^{-1}}{1 - az^{-1}} = -\frac{a}{1 - az^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad h[n] = -a^{n+1}u[n] + a^{n-1}u[n-1]$$

Forma directa I



Forma directa II



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

10

Bibliografía: Oppenheim 6.2, Proakis 7.2 y 7.3

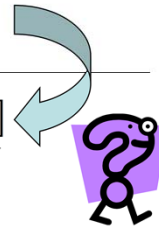
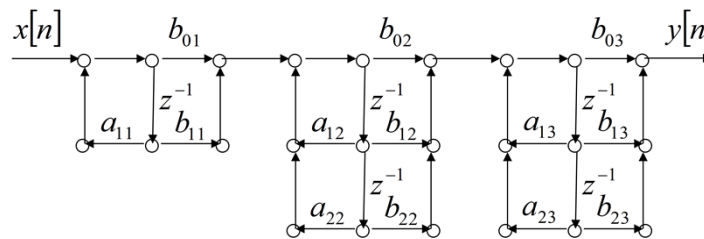
La forma no directa (la del grafo de arriba) tiene una multiplicación menos. Esto tiene una implicación a la hora de cuantizar los coeficientes. Ejercicio: comprobar que efectivamente sale esta $H(z)$

Estructuras IIR

- (Forma directa I)
- (Forma directa II)
- Forma de cascada
- Forma paralela

Estructuras IIR: Cascada

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=0}^{M_1} (1 - z_k z^{-1}) \prod_{k=0}^{M_2} (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=0}^{N_2} (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})} = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{a_{0k} - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

12

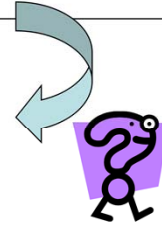
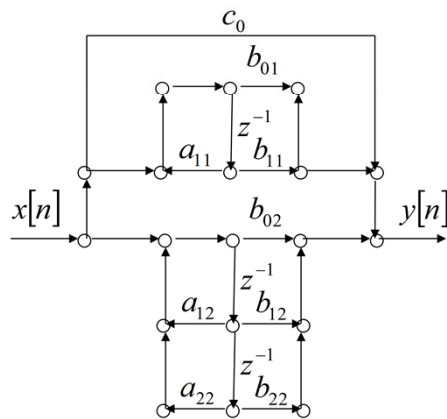
Bibliografía: Oppenheim 6.3, Proakis 7.3

Salen sistemas de orden 2 si agrupo los polos. $H(z)$ no se corresponde con el diagrama porque he obviado los a_{0k} . Todos los $1/a_{0k}$ tendría que agruparlos en un K final. Los a_{ij} tendrían que modificarse convenientemente.

Problemas Opp: 6.22*

Estructuras IIR: Paralela

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M_p} a_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{M_1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M_2} \frac{B_k (1 - z_k z^{-1})}{(1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})} = \sum_{k=0}^{M_p} c_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{M_2} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{a_{0k} - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

13

Bibliografía: Oppenheim 6.3, Proakis 7.3

Problemas Pro: 7.8, 7.9, 7.13*, 7.14*, 7.55, 7.57

Estructuras IIR

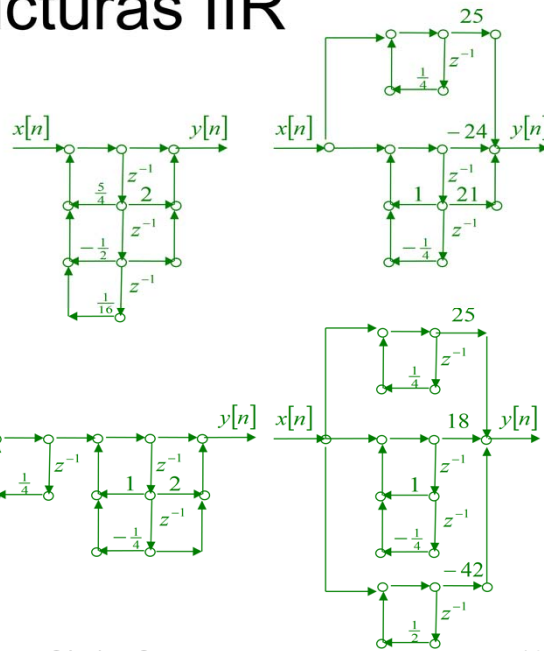
Ejemplo:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{16}z^{-3}}$$

$$H(z) = \frac{25}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-24 + 21z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

$$H(z) = \frac{25}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{18}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2} - \frac{42}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$



Curso 2012/2013

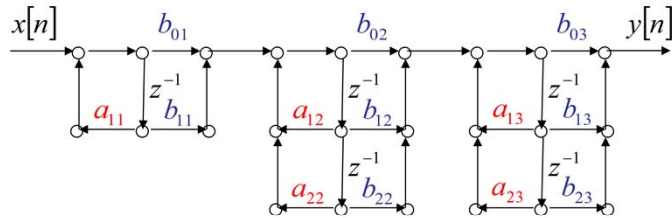
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

14

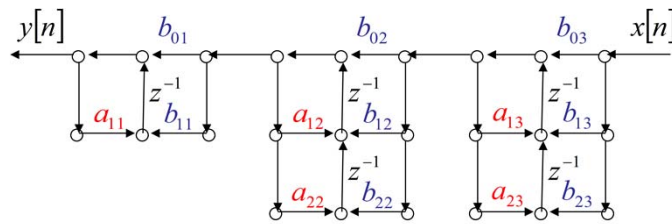
Bibliografía: Oppenheim 6.3, Proakis 7.3



Formas transpuestas



Los **polos** se implementan antes que los **ceros**.



Los **ceros** se implementan antes que los **polos**.

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

15

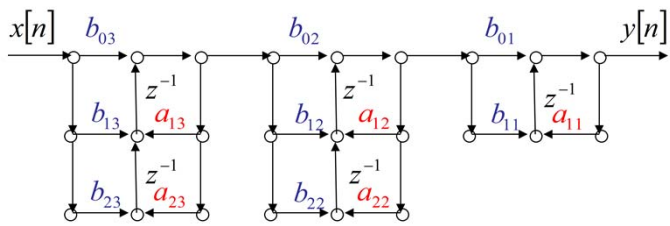
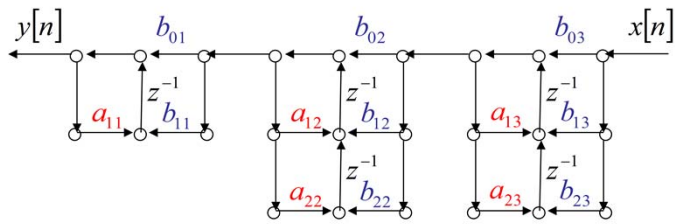
Bibliografía: Oppenheim 6.4, Proakis 7.3

Ejercicio: Comprobar que representan el mismo sistema

Problemas Opp: 6.10, 6.11*, 6.16, 6.17, 6.18*, 6.19, 6.20, 6.23*, 6.26, 6.35*, 6.36

Problemas Pro: 7.5, 7.12

Formas transpuestas



Se redibuja el grafo de la forma estándar con la entrada a la izquierda.

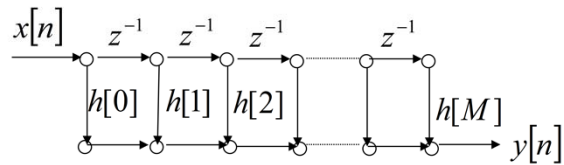
Estructuras FIR

- Forma directa
- Forma de cascada
- Estructuras para sistemas FIR de fase lineal
- Estructura en celosía

La forma directa I y II son la misma en este caso

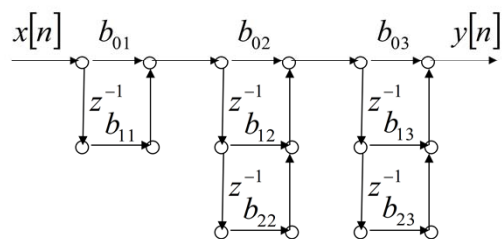
Estructuras FIR: Forma directa

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \longrightarrow h[n] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Estructuras FIR: Cascada

$$H(z) = A \prod_{k=0}^{M_1} (1 - z_k z^{-1}) \prod_{k=0}^{M_2} (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1}) = \prod_{k=1}^{N_s} b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

19

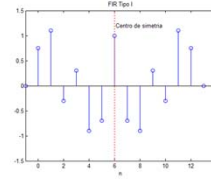
Bibliografía: Oppenheim 6.5, Proakis 7.2

Salen sistemas de orden 2 si grupo los polos

Estructuras FIR: Fase lineal

Tipo I

$$h[M - n] = h[n] \quad n = 0, 1, \dots, M \quad M = 2m$$



$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[\frac{M}{2}]x[n-\frac{M}{2}] + \sum_{k=M/2+1}^M h[k]x[n-k]$$

$$(k' = M - k) = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[\frac{M}{2}]x[n-\frac{M}{2}] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k]$$

$$(h[M-n] = h[n]) = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[\frac{M}{2}]x[n-\frac{M}{2}]$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

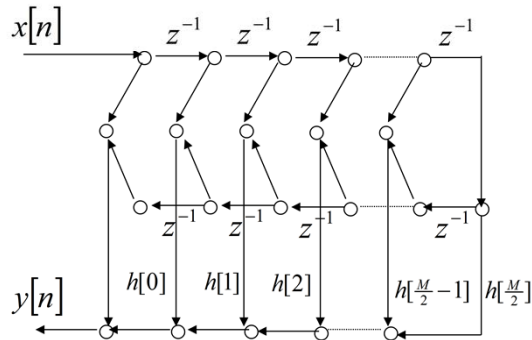
20

Bibliografía: Oppenheim 6.5, Proakis 7.2

Estructuras FIR: Fase lineal

Tipo I

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[\frac{M}{2}]x[n-\frac{M}{2}]$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

21

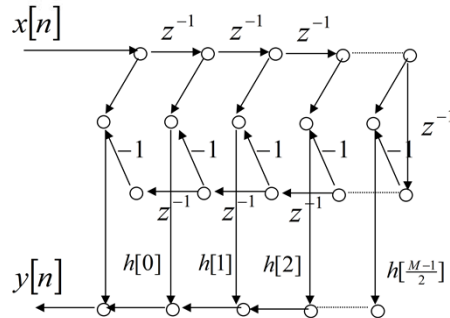
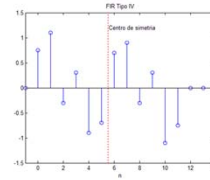
Bibliografía: Oppenheim 6.5, Proakis 7.2

Estructuras FIR: Fase lineal

Tipo IV

$$h[M-n] = -h[n] \quad n = 0, 1, \dots, M \quad M = 2m+1$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

22

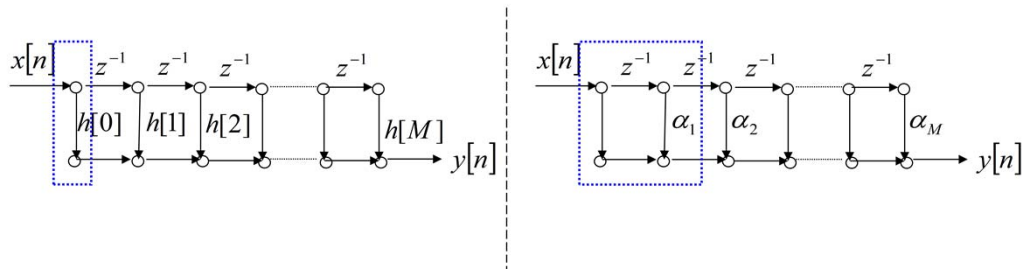
Bibliografía: Oppenheim 6.5, Proakis 7.2

Ejercicio: Comprobar este resultado

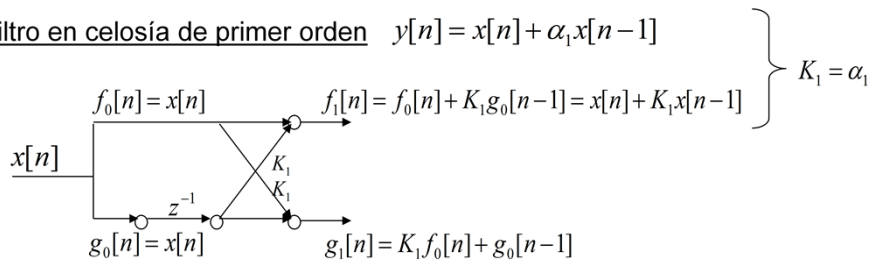
Problemas Opp: 6.6*, 6.29, 6.30, 6.37, 6.38

Problemas Pro: 7.1

Estructuras FIR: Filtro en celosía



Filtro en celosía de primer orden $y[n] = x[n] + \alpha_1 x[n-1]$



Curso 2012/2013

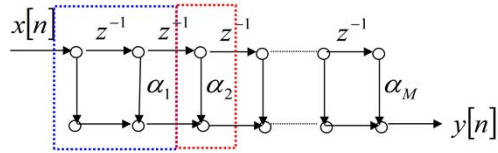
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

23

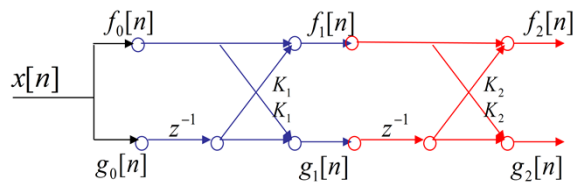
Bibliografía: Proakis 7.2

Estructuras FIR: Filtro en celosía

Filtro en celosía de segundo orden



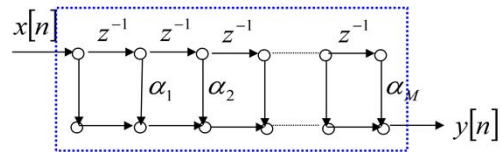
$$\left. \begin{aligned}
 y[n] &= x[n] + \alpha_1 x[n-1] + \alpha_2 x[n-2] \\
 f_2[n] &= x[n] + K_1(1 + K_2)x[n-1] + K_2 x[n-2]
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 K_2 &= \alpha_2 \\
 K_1 &= \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2}
 \end{aligned}$$



Estructuras FIR: Filtro en celosía

Filtro en celosía de orden M

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^M \alpha_k x[n-k]$$



$m = 0$

$$f_0[n] = g_0[n] = x[n]$$

$m = 1, 2, \dots, M$

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1]$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1]$$

$$y[n] = f_M[n]$$

$$\left. \begin{aligned} F_m(z) &= A_m(z)X(z) \\ G_m(z) &= B_m(z)X(z) \end{aligned} \right| B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1})$$

Cálculo de los coeficientes de la celosía

$$A_m(z) = H(z) \longrightarrow K_m = \alpha_m \longrightarrow A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

25

Bibliografía: Proakis 7.2

Estructuras FIR: Filtro en celosía

Ejemplo:

$$A_3(z) = H(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3} \longrightarrow K_3 = \frac{1}{3}$$

$$B_3(z) = z^{-3}A_3(z^{-1}) = z^{-3} + \frac{13}{24}z^{-2} + \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{1}{3}$$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \longrightarrow K_2 = \frac{1}{2}$$

$$B_2(z) = z^{-2}A_2(z^{-1}) = z^{-2} + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} \longrightarrow K_1 = \frac{1}{4}$$

Bibliografía: Proakis 7.2

Problemas Opp: 6.34

Problemas Pro: 7.2*, 7.11, 7.15, 7.16, 7.17*, 7.18, 7.21, 7.22, 7.23, 7.32, 7.56*

Contenido

- Estructuras IIR
- Estructuras FIR
- Cuantización de coeficientes

Representación binaria

Complemento a 2

$$x = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} \right)$$

$$x \in [-X_m, X_m]$$

$$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 \longrightarrow \hat{x} = Q_B(x) = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i} \right) \quad \text{Representación con B+1 bits.}$$

$$\Delta = X_m 2^{-B}$$

$$\hat{x} \in [-X_m, X_m - \Delta] \cap \Delta Z$$

$$e = \hat{x} - x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Redondeo} \\ \text{Truncamiento} \end{array} \right\} \begin{array}{l} e \in \left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \\ e \in (-\Delta, 0] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ejemplo: } B = 7 \\ X_m = 128 \end{array} \right\} \hat{x} = -128, -127, \dots, -1, 0, 1, \dots, 127$$

$$\Delta = 128 \cdot 2^{-7} = 1$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

28

Bibliografía: Oppenheim 6.6, Proakis 7.5

Una de las motivaciones de buscar distintas estructuras es por su comportamiento frente al ruido de cuantización

Problemas Opp: 6.40, 6.41

Representación binaria

Overflow

A veces NO es deseable.

Ejemplo:

4	0100	
+ 4	+ 0100	
<hr/>		
8	1000	Overflow (-8)

$$e = \hat{x} - x = (-8) - 8 = -16$$

Hay máquinas en las que se hace clipping y $4+4=7$

$$e = \hat{x} - x = 7 - 8 = -1$$

Aunque, a veces SÍ es útil.

Ejemplo:

4	0100		
4	0100	1000	Overflow (-8)
+ -1	+ 1111	+ 1111	1000
<hr/>		<hr/>	
7			1 0111

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

29

Bibliografía: Oppenheim 6.6, Proakis 7.5

Si se suman varios números en C2, cuya suma total no produce overflow, entonces da igual que las sumas intermedias sí produzcan overflow.

Problemas Pro: 7.41

DSPs en el mercado

Familia	Cuantización	Data width	Instr. width	Clk	BDTI mark 2000	On-chip memory	Voltage	Precio
TMS320C24x/ TMS320F24x	Fixed point	16 bits	16/32 bits	40 MHz	n/a	13 K–69 K	3.3	\$2–8
TMS320C28x/ TMS320F28x	Fixed point	32 bits	16/32 bits	150 MHz	n/a	40 K–294 K	1.8, 1.9	\$5–15
TMS320C54x	Fixed point	16 bits	16 bits	160 MHz	500	24 K–1280 K	1.5, 1.6, 1.8, 2.5	\$4–107
TMS320C55x	Fixed point	16 bits	8–48 bits	300 MHz	1460	80 K–376 K	1.2–1.6, 1.26, 1.6	\$5–19
TMS320C62x	Fixed point	16 bits	32 bits	300 MHz	1920	72 K–896 K	1.5, 1.8	\$9–102
TMS320C64x	Fixed point	8/16 bits	32 bits	1 GHz	9130	160 K–1056 K	1.1, 1.2, 1.4	\$18–219
TMS320C67x	Floating point	32 bits	32 bits	300 MHz	1470	72 K–264 K	1.2, 1.26, 1.4, 1.8, 1.9	\$14–105

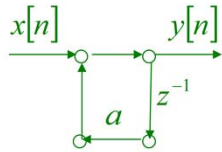
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

30

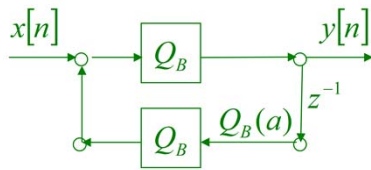
Efecto de la cuantización

Ejemplo:



$$y[n] = x[n] + ay[n-1]$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



$$y[n] = Q_B(x[n] + Q_B(Q_B(a)y[n-1]))$$

$$" \hat{H} " (z) = \frac{1}{1 - Q_B(a)z^{-1}}$$

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

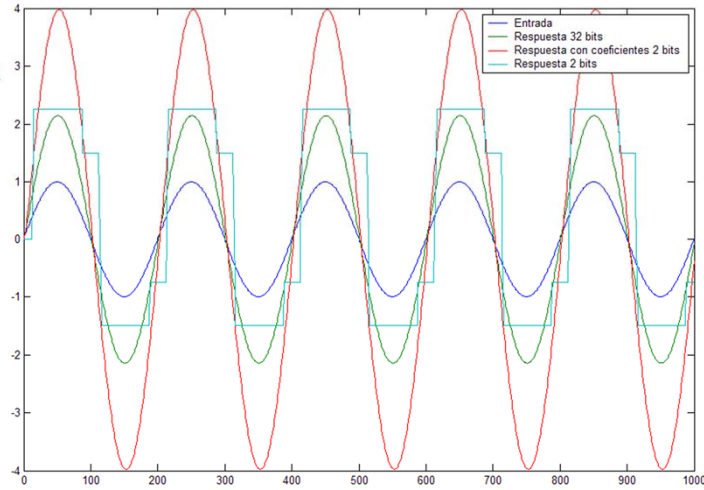
Es un sistema no lineal. No tiene sentido hablar de función de transferencia como en sistemas LTI

Efecto de la cuantización

$$X_m = 3$$

$$B = 2$$

$$a = 0.5346751211$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

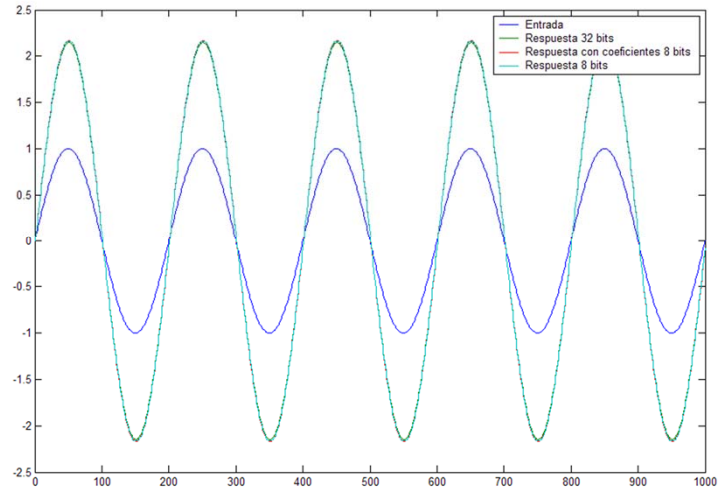
32

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

El que pone “con coeficientes 2 bits” es que los coeficientes están a 2 bits, pero todo lo demás a 32. En todo esto estoy usando redondeo y no saturación. El sistema con cuantización es no lineal. No tiene sentido de hablar de función de transferencia en el sentido de algo LTI. Ejercicio: repetir esta gráfica

Efecto de la cuantización

$$X_m = 3$$
$$B = 7$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

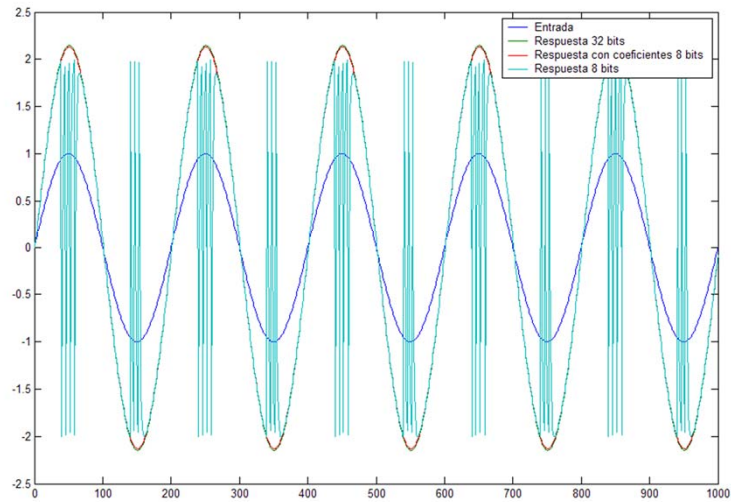
33

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

8 bits es suficiente?. Ejercicio: Repetir esta gráfica

Efecto de la cuantización

$$X_m = 2$$
$$B = 7$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

34

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

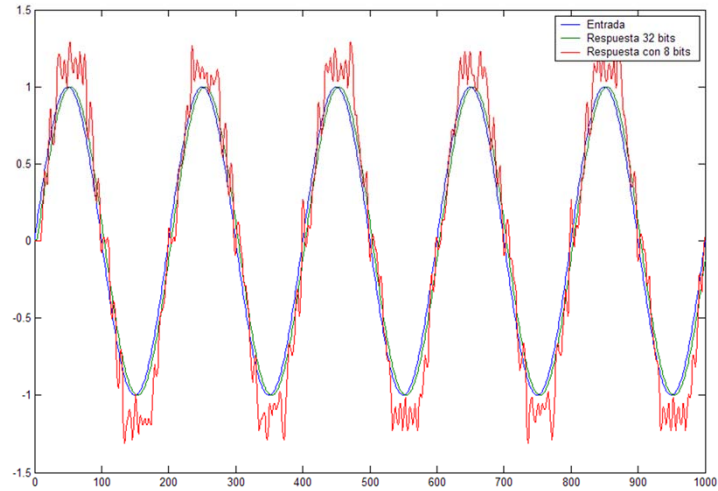
Al recortar un poquito X_m ya la señal se sale de rango y en estos intervalos puede ser cualquier cosa. Pero siempre dentro de un margen. Ejercicio: repetir esta gráfica

Efecto de la cuantización

Filtro de Butterworth orden 5

$$X_m = 5$$

$$B = 7$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

35

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

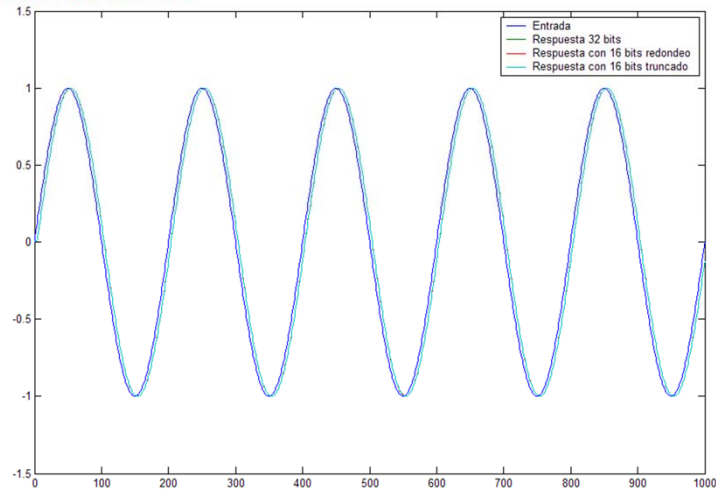
8 bits no es la panacea. Depende del orden del sistema. Ejercicio: repetir esta gráfica

Efecto de la cuantización

Filtro de Butterworth orden 5

$$X_m = 3$$

$$B = 15$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

36

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

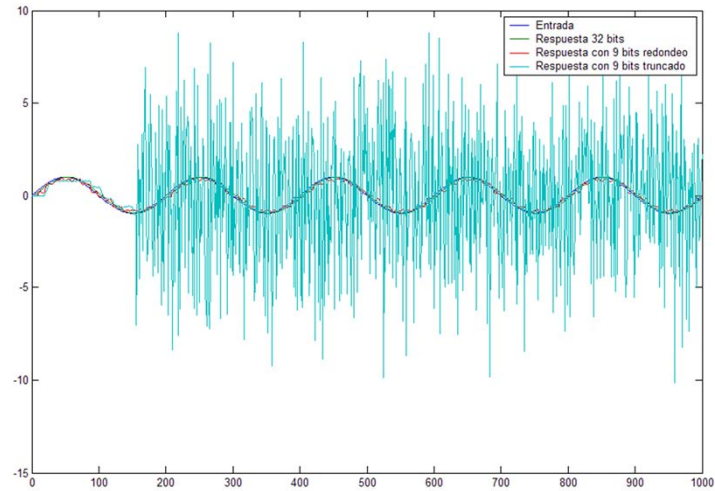
Con 16 bits, parece que este sistema va bien. ¿Da igual redondeo que truncado?
Ejercicio: repetir esta gráfica

Efecto de la cuantización

Filtro de Butterworth orden 5

$$X_m = 3$$

$$B = 8$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

37

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

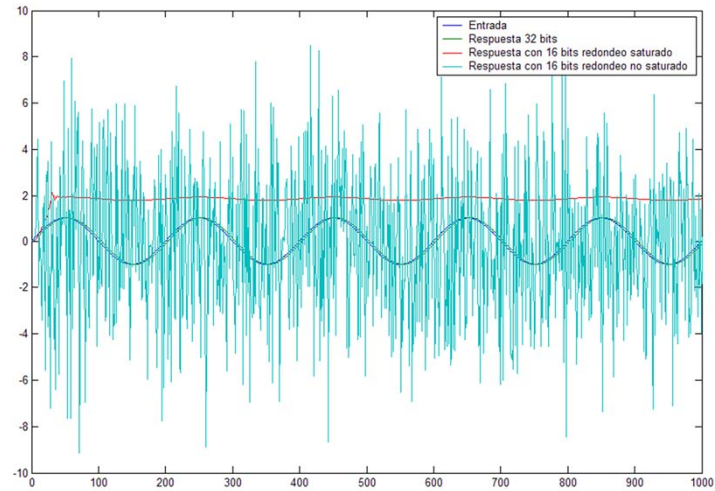
Truncar o redondear da igual dependiendo del número de bits. Ejercicio: repetir esta gráfica

Efecto de la cuantización

Filtro de Butterworth orden 5

$$X_m = 2.75$$

$$B = 16$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

38

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

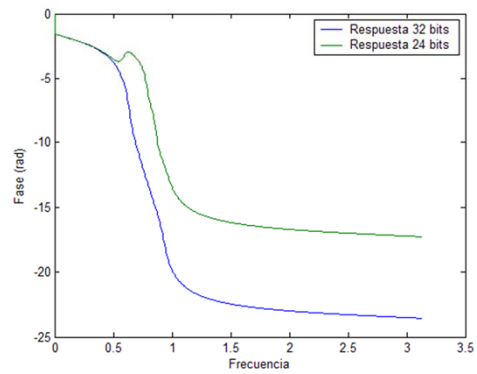
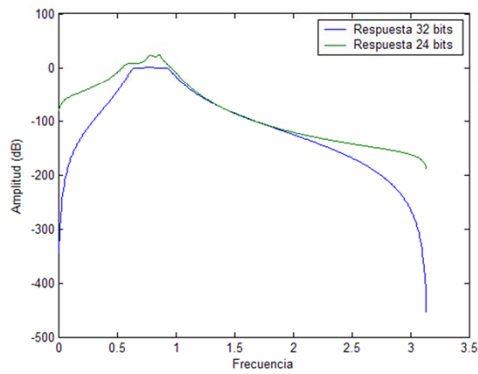
Esto pasa porque 2.75 es menor que 2.81 que es el valor de uno de los coeficientes del filtro.

b = 0.0033 0.0164 0.0328 0.0328 0.0164 0.0033

a = 1.0000 -2.4744 2.8110 -1.7038 0.5444 -0.0723

Efecto de la cuantización

```
[b,a]=butter(7,[0.2 0.3]);  
Xm=600;  
B=23;
```



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

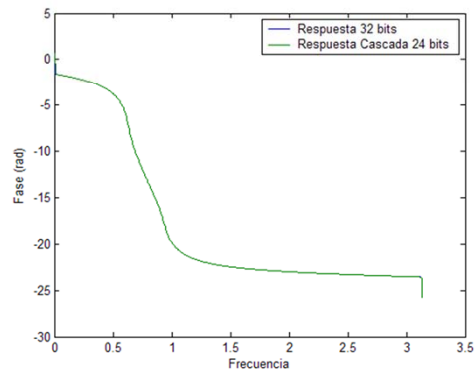
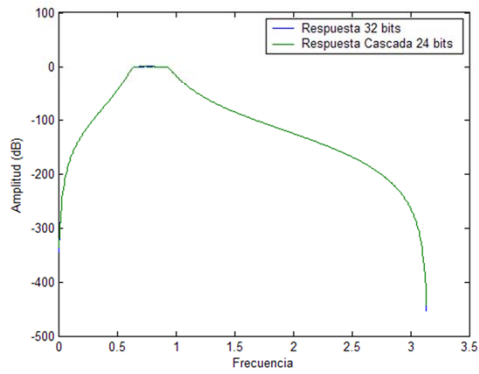
39

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Forma directa II

Efecto de la cuantización

```
[b,a]=butter(7,[0.2 0.3]);  
Xm=600;  
B=23;
```



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

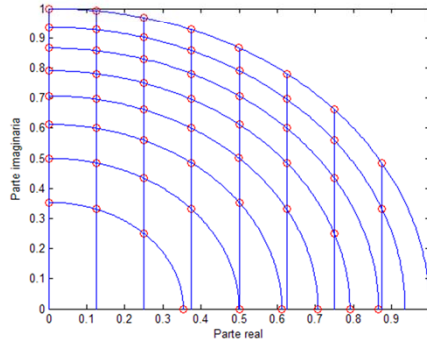
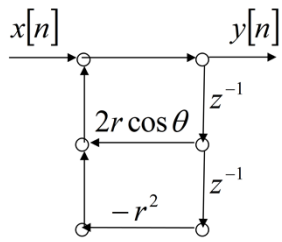
40

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Polos de un sistema de segundo orden cuantizado

$$z = re^{\pm j\theta}$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



$B = 3$

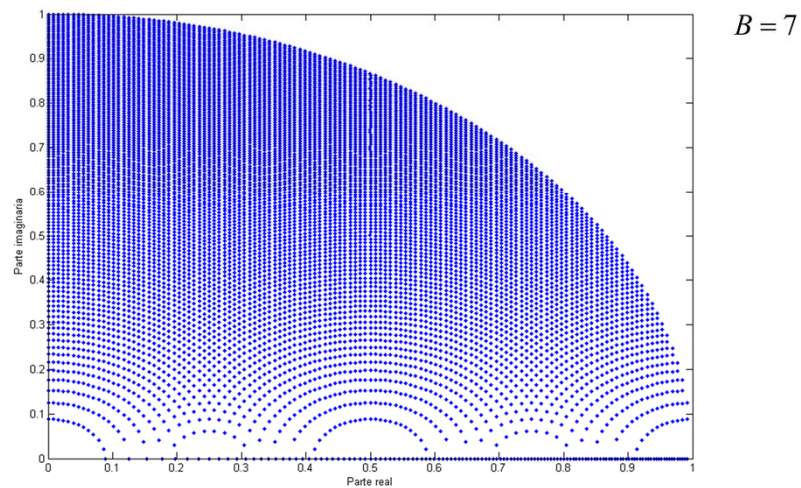
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

41

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Polos de un sistema de segundo orden cuantizado



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

42

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

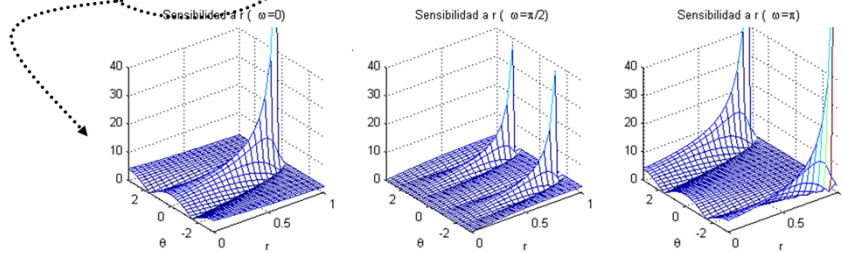
Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden cuantizado

Análisis de sensibilidad

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{|1 - 2r \cos \theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}|^2} = \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta \cos \omega + r^2 \cos 2\omega)^2 + (2r \cos \theta \sin \omega - r^2 \sin 2\omega)^2}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2|_{r=r_0, \theta=\theta_0} + \Delta |H(e^{j\omega})|^2$$

$$\Delta |H(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{\partial |H(e^{j\omega})|^2}{\partial r} \Big|_{r=r_0, \theta=\theta_0} \Delta r + \frac{\partial |H(e^{j\omega})|^2}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0, \theta=\theta_0} \Delta \theta$$



Curso 2012/2013

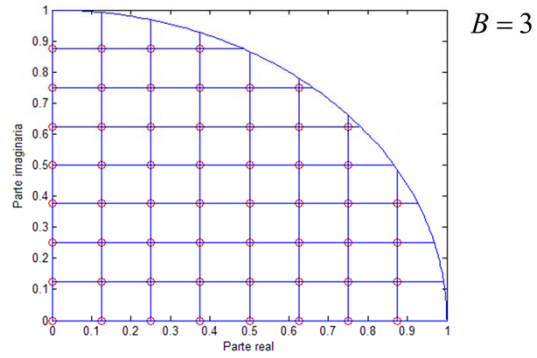
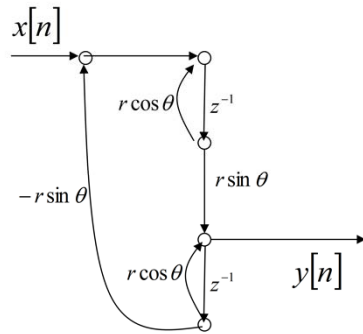
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

43

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Ejercicio: Repetir estas gráficas

Polos de un sistema de segundo orden cuantizado



Curso 2012/2013

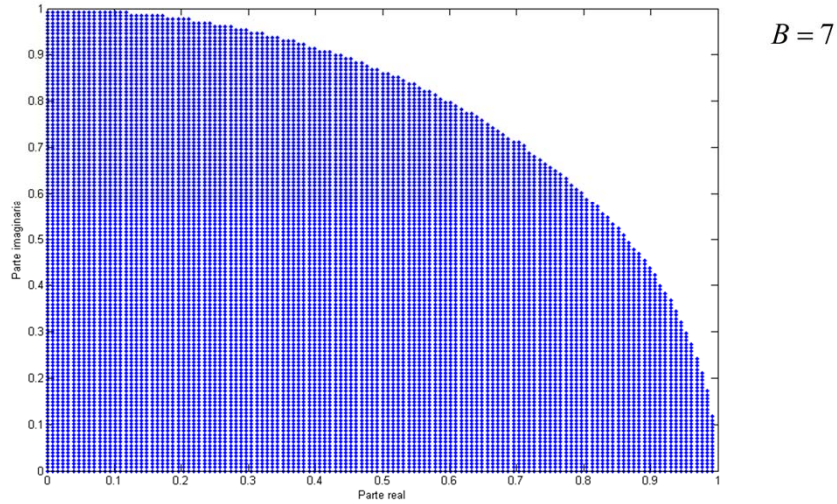
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

44

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

El coste de esta distribución uniforme es realizar más multiplicaciones. Ejercicio: Comprobar que este grafo representa un sistema de segundo orden standard

Polos de un sistema de segundo orden cuantizado



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

45

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Conclusión: se debe evitar la forma directa para filtros IIR

Cuantización en filtros FIR

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^M \hat{h}[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^M (h[n] + e[n])z^{-n} = H(z) + \underbrace{\Delta H(z)}_{\text{Sistema en paralelo}}$$

La posición de los ceros es más sensible cuanto más agrupados estén en el plano Z.

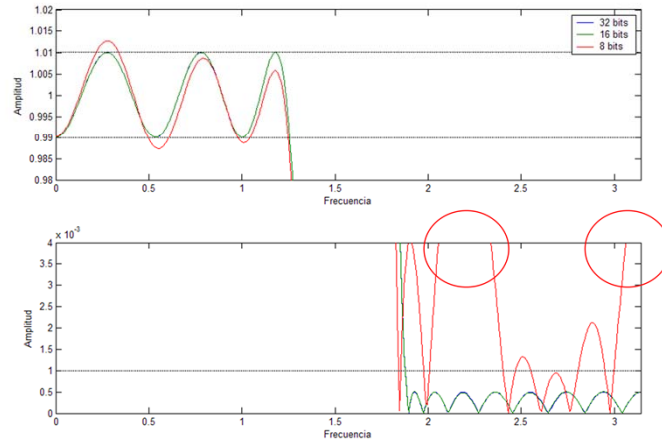
Sin embargo, para la mayor parte de los sistemas, los ceros se encuentran distribuidos a lo largo del círculo unidad.

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Cuantización en filtros FIR

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01 \quad 0 \leq \omega \leq 0.4\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.001 \quad 0.6\pi \leq \omega \leq \pi$$



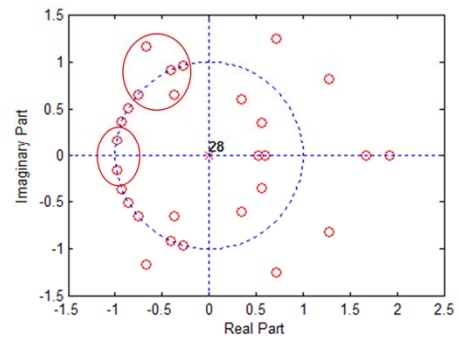
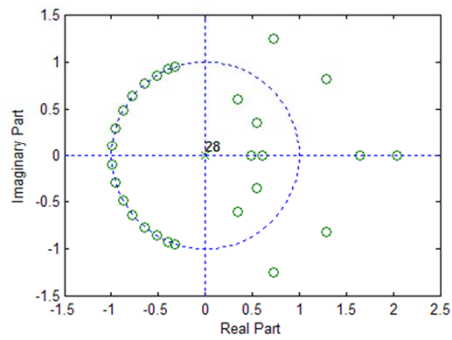
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

47

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Cuantización en filtros FIR



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

48

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Problemas Opp: 6.44*

Cuantización y fase lineal

Tipo I

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

Tipo IV

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m+1$$

La linealidad de la fase se mantiene.

Tipo I

$$\hat{h}[n] = \begin{cases} \hat{h}[M-n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad M = 2m$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

49

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

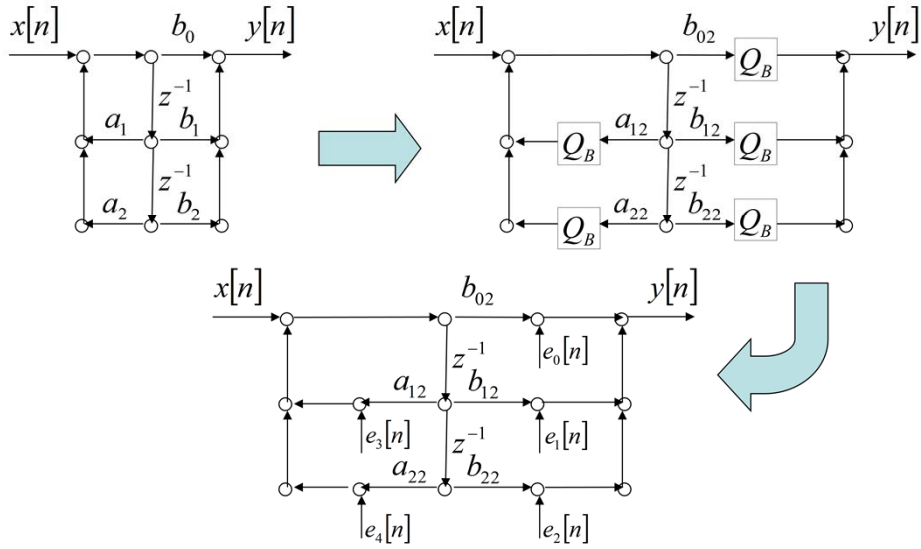
Problemas Opp: 6.33*

Análisis de los efectos de cuantización

- Los sistemas cuantizados se comportan como sistemas NO lineales
- Su análisis es muy complejo y se suele reducir a una simulación del proceso
- Sin embargo, una aproximación lineal suele ser suficiente, al menos, para seleccionar la longitud de palabra.

Bibliografía: Oppenheim 6.7, Proakis 7.6 y 7.7

Análisis de los efectos de cuantización



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

51

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Análisis de los efectos de cuantización

Hipótesis del modelo:

1. Las fuentes de ruido son procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio y de espectro uniforme (ruido blanco).

$$\phi_{ee}[n] = \sigma_e^2 \delta[n] + m_e^2$$

2. Cada fuente de ruido tiene una distribución uniforme.

Redondeo

$$-\frac{1}{2}2^{-B} \leq e[n] \leq \frac{1}{2}2^{-B}$$

$$m_e = 0$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$$

Truncamiento

$$-2^{-B} \leq e[n] \leq 0$$

$$m_e = -\frac{1}{2}2^{-2B}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$$

3. Cada fuente de ruido está incorrelada con la entrada al cuantizador correspondiente, todas las demás fuentes de ruido y la entrada del sistema.

No puede ser cierta, por ejemplo, cuantización de una señal constante.

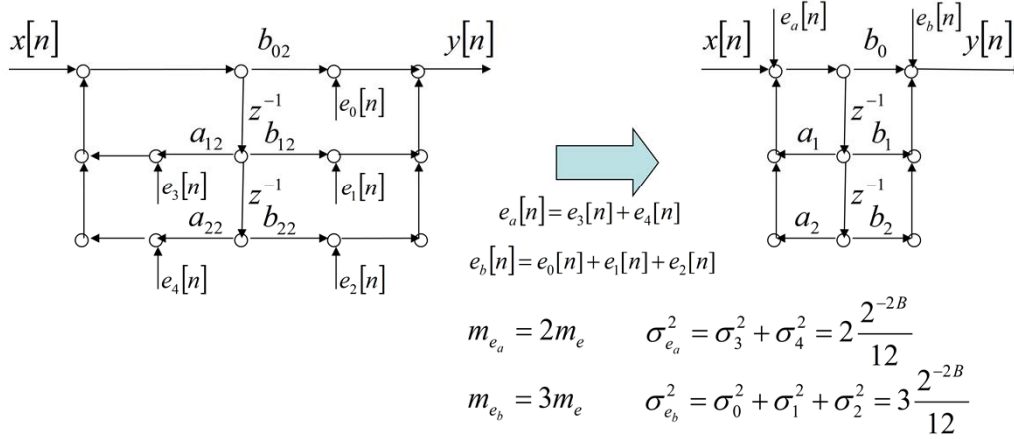
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

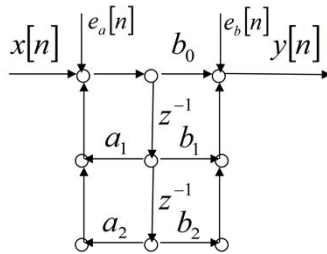
52

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Análisis de los efectos de cuantización



Análisis de los efectos de cuantización



$$\begin{aligned}\hat{Y}(z) &= H(z)(X(z) + E_a(z)) + E_b(z) \\ &= Y(z) + (H(z)E_a(z) + E_b(z)) \\ &= Y(z) + E_y(z)\end{aligned}$$

$$m_{e_y} = m_{e_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] + m_{e_b} = m_{e_a} H(e^{j0}) + m_{e_b}$$

redondeo

$$m_{e_y} = 0$$

$$\Phi_{e_y e_y}(e^{j\omega}) = \sigma_{e_a}^2 |H(e^{j\omega})|^2 + \sigma_{e_b}^2$$

$$\sigma_{e_y}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{e_y e_y}(e^{j\omega}) d\omega = \sigma_{e_a}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega + \sigma_{e_b}^2 = \sigma_e^2 \left(2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega + 3 \right)$$

$$= \sigma_e^2 \left(N \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 + (M+1) \right)$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

54

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

El ruido generado por la implementación de los polos es filtrado por el sistema. El ruido generado por la implementación de los ceros no se filtra. No se puede decidir cuál es mejor que otro hasta que no se vean cuáles son los valores específicos de los coeficientes. Hay el mismo número de polos que de ceros (N=M) pero mientras hay N coeficientes distintos para los polos, hay M+1 (+1 por el b0) coeficientes distintos para los ceros.

Problemas Opp: 6.42, 6.43

Problemas Pro: 7.42, 7.45, 7.46, 7.47, 7.48, 7.49, 7.51, 7.52, 7.53, 7.54

Escalado para evitar el overflow

Sea $h_k[n]$ la respuesta al impulso del nodo $w_k[n]$ a la entrada $x[n]$

$$w_k[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k[m]x[n-m]$$

Entonces,

$$|w_k[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k[m]x[n-m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]x[n-m]| \leq x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|$$

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|} \Leftrightarrow |w_k[n]| < 1$$

Si hay algún nodo para el que esta condición no se cumple, se escala la entrada de tal forma que

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max_k \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]| \right\}}$$

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

El problema de este escalado es que es muy restrictivo para la mayoría de la señales.

Escalado para evitar overflow

Si la señal de entrada es de banda estrecha, entonces

$$x[n] \approx x_{\max} \cos \omega_0 n$$

$$w_k[n] = |H_k(e^{j\omega_0})| x_{\max} \cos(\omega_0 n + \angle H_k(e^{j\omega_0}))$$

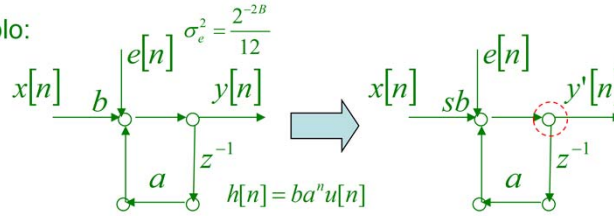
$$|w_k[n]| \leq |H_k(e^{j\omega_0})| x_{\max}$$

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max_{k,\omega} \{|H_k(e^{j\omega})|\}}$$

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Escalado para evitar overflow

Ejemplo:



$$x[n] \text{ sigue } U(-x_{\max}, x_{\max}) \longrightarrow \sigma_x^2 = \frac{x_{\max}^2}{3}$$

$$sx_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |ba^m u[m]|} \longrightarrow s < \frac{1}{x_{\max} \sum_{m=0}^{\infty} |b||a^m|} = \frac{1}{x_{\max} |b| \frac{1}{1-|a|}} = \frac{1-|a|}{x_{\max} |b|}$$

$$SNR_s = \frac{\sigma_{y'}^2}{\sigma_{e_y'}^2} = \frac{s^2 \sigma_y^2}{\sigma_{e_y}^2} = \left(\frac{1-|a|}{x_{\max} |b|} \right)^2 SNR \longrightarrow x_{\max}, |a|, |b| \uparrow \Rightarrow SNR_s \downarrow$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

57

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

El ruido viene de cuantizar el producto por a antes de sumar y cuantizar el producto de b. Si xmax o b aumentan entonces la SNR disminuye porque el error de cuantización es mayor (eso está claro). Lo curioso es que si a aumenta (el polo se acerca al círculo unidad) la SNR disminuye.

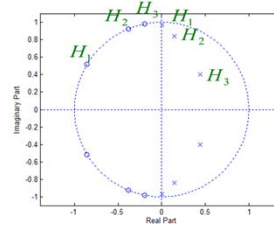
Problemas Opp: 6.45

Problemas Pro: 7.44

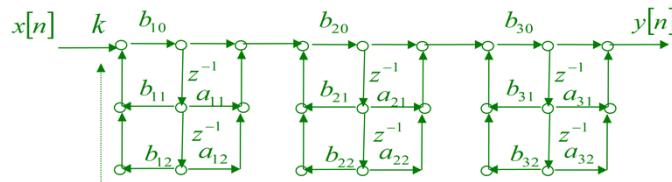
Análisis de una estructura en cascada IIR

Ejemplo:

Filtro elíptico paso bajo con frecuencia de corte 0.5π , 1dB de rizado en la banda de paso y 50 dB de atenuación en la banda de rechazo.

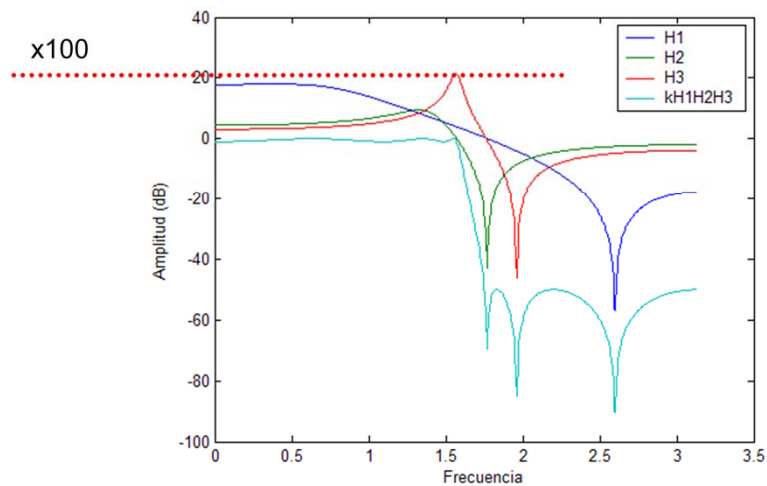


$$k = 0.0481$$



Dado que k es muy pequeño el resto de los sistemas de la cascada deben tener una ganancia muy alta

Análisis de una estructura en cascada IIR



Curso 2012/2013

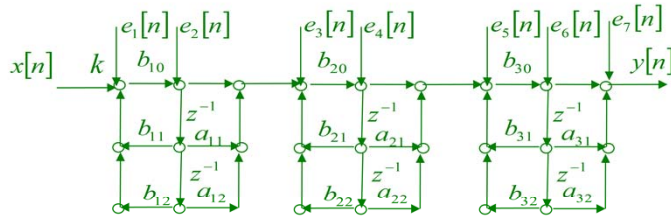
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

59

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Esto significa que el ruido que se genere en H1 y H2 se verá amplificado por 100 en H3

Análisis de una estructura en cascada IIR



$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \frac{2^{-2B}}{12} \\ \sigma_{e_1}^2 &= 3\sigma_e^2 \\ \sigma_{e_2}^2 &= \sigma_{e_4}^2 = \sigma_{e_6}^2 = \sigma_e^2 \\ \sigma_{e_3}^2 &= \sigma_{e_5}^2 = 4\sigma_e^2 \\ \sigma_{e_7}^2 &= 2\sigma_e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{e_y}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_1}^2 |H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})H_3(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_2}^2 \left| \frac{1}{A_1(e^{j\omega})} H_2(e^{j\omega})H_3(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_3}^2 |H_2(e^{j\omega})H_3(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_4}^2 \left| \frac{1}{A_2(e^{j\omega})} H_3(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_5}^2 |H_3(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_6}^2 \left| \frac{1}{A_3(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega + \sigma_{e_7}^2\end{aligned}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

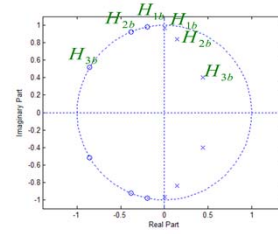
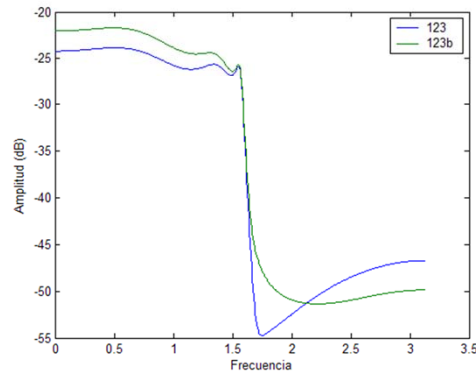
60

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Análisis de una estructura en cascada IIR

La agrupación de los polos es importante

$$P_{e_y, e_y}(e^{j\omega})$$
$$B = 16$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

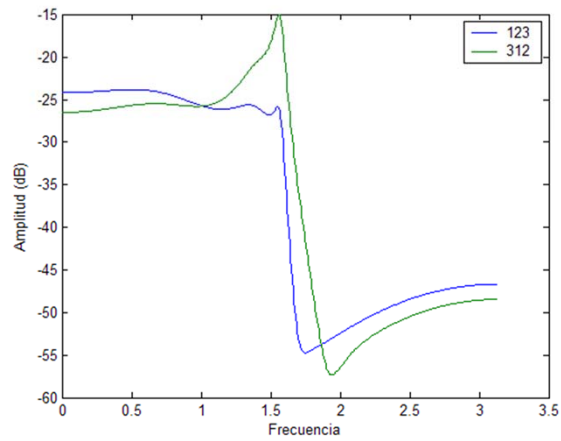
61

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Análisis de una estructura en cascada IIR

Y el orden de los filtros también

$$P_{e_y e_y}(e^{j\omega})$$
$$B = 16$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

62

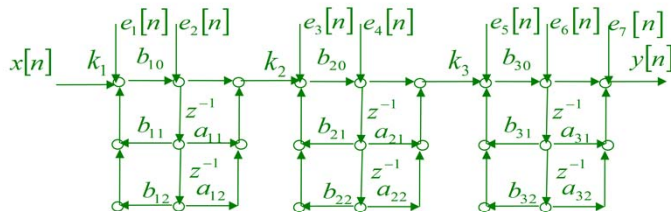
Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Análisis de una estructura en cascada IIR

- Reglas heurísticas:
 - El polo que esté más cerca del círculo unidad debe emparejarse con el cero que esté más cerca de este polo
 - Aplicar la regla anterior hasta que no queden más polos ni ceros
 - Las secciones de segundo orden se deben ordenar por orden creciente o decreciente de cercanía al centro.

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Análisis de una estructura en cascada IIR



$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$$

$$\sigma_{e_1}^2 = 3\sigma_e^2$$

$$\sigma_{e_2}^2 = \sigma_{e_4}^2 = \sigma_{e_6}^2 = \sigma_e^2$$

$$\sigma_{e_3}^2 = (2 + 2k_2^2)\sigma_e^2$$

$$\sigma_{e_7}^2 = 2\sigma_e^2$$

$$\sigma_{e_5}^2 = (2 + 2k_3^2)\sigma_e^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{e_y}^2 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (k_2 k_3)^2 \sigma_{e_1}^2 |H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})H_3(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_2}^2 (k_2 k_3)^2 \left| \frac{1}{A_1(e^{j\omega})} H_2(e^{j\omega})H_3(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_3}^2 k_3^2 |H_2(e^{j\omega})H_3(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_4}^2 k_3^2 \left| \frac{1}{A_2(e^{j\omega})} H_3(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_5}^2 |H_3(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{e_6}^2 \left| \frac{1}{A_3(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega + \sigma_{e_7}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 \max_{|\omega| \leq \pi} |H_1(e^{j\omega})| &< 1 \\ k_1 k_2 \max_{|\omega| \leq \pi} |H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})| &< 1 \\ k_1 k_2 k_3 &= k \end{aligned}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

64

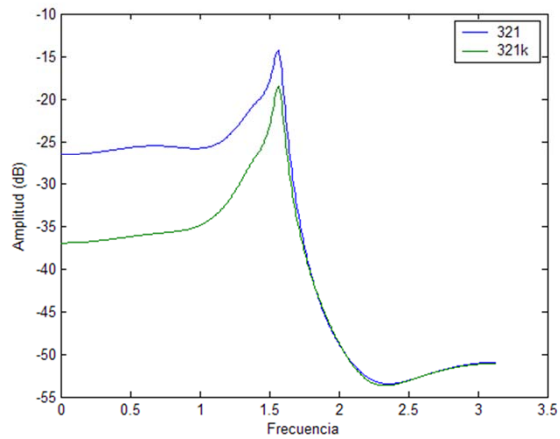
Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

El ruido de 3 y 5 se incrementan porque hay una multiplicación más (k2 y K3), pero en los términos de ruido aparece k2 y k3 por lo que si éstos son menores que 1 se disminuye fuertemente el error.

Análisis de una estructura en cascada IIR

$$k = 0.0481 = k_3 k_2 k_1 = 0.1985 \cdot 0.5042 \cdot 0.4809$$

$$P_{e_y e_y}(e^{j\omega})$$
$$B = 16$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

65

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Los sistemas FIR son exactamente iguales que estos.

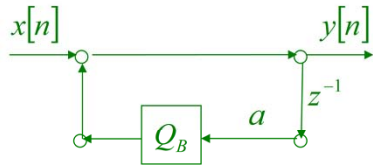
Coma flotante

- Los sistemas con coma fija requieren de técnicas sofisticadas para evitar el overflow.
- Los sistemas con coma flotante proporcionan una solución elegante al problema y alcanzan un buen compromiso entre error de cuantización bajo y un amplio rango dinámico.
- Sin embargo, no están absolutamente libres de los errores de cuantización.

Bibliografía: Oppenheim 6.8, Proakis 7.6 y 7.7

Zero-input limit cycles in fixed-point realizations of IIR filters

Ejemplo:



$$B = 3 \left. \vphantom{B} \right\} \hat{x} = -\frac{8}{8}, -\frac{7}{8}, \dots, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \dots, \frac{7}{8}$$

$$X_m = 1 \left. \vphantom{X_m} \right\} \Delta = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$x[n] = \frac{7}{8} \delta[n]$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$y[n] = Q_B(x[n] + Q_B(ay[n-1]))$$

$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = Q_B(x[0]) = \frac{7}{8}$$

$$y[1] = Q_B\left(\frac{1}{2}y[0]\right) = Q_B\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y[2] = Q_B\left(\frac{1}{2}y[1]\right) = Q_B\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$y[3] = Q_B\left(\frac{1}{2}y[2]\right) = Q_B\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

$$y[4] = Q_B\left(\frac{1}{2}y[3]\right) = Q_B\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$y[5] = Q_B\left(\frac{1}{2}y[4]\right) = Q_B\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

Bibliografía: Oppenheim 6.9, Proakis 7.6 y 7.7

Si una muestra cae justo en medio entre otras dos, redondeamos hacia arriba

Zero-input limit cycles in fixed-point realizations of IIR filters

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} B = 3 \\ X_m = 1 \end{array} \right\} \hat{x} = -\frac{8}{8}, -\frac{7}{8}, \dots, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \dots, \frac{7}{8} \quad \left| \begin{array}{l} x[n] = 0 \quad n \geq 0 \\ y[n] = x[n] + Q_B\left(\frac{3}{4}y[n-1]\right) + Q_B\left(-\frac{3}{4}y[n-2]\right) \\ y[-2] = -\frac{3}{4} = 1.010 \\ y[-1] = \frac{3}{4} = 0.110 \end{array} \right.$$

$$y[0] = \frac{3}{4}y[-1] - \frac{3}{4}y[-2] = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

$$y[1] = \frac{3}{4}y[0] - \frac{3}{4}y[-1] = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} y[0] &= Q_B\left(\frac{3}{4}y[-1]\right) + Q_B\left(-\frac{3}{4}y[-2]\right) = Q_B(0.110 \cdot 0.110) + Q_B(1.010 \cdot 1.010) = \\ &= Q_B(0.100100) + Q_B(0.100100) = 0.101 + 0.101 = 1.010 = -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[1] &= Q_B\left(\frac{3}{4}y[0]\right) + Q_B\left(-\frac{3}{4}y[-1]\right) = Q_B(0.110 \cdot 1.010) + Q_B(1.010 \cdot 0.110) = \\ &= -Q_B(0.100100) - Q_B(0.100100) = -0.101 - 0.101 = 1.011 + 1.011 = 0.110 = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

68

Bibliografía: Oppenheim 6.9, Proakis 7.6 y 7.7

Problemas Pro: 7.50

Resumen

- **Estructuras IIR**
 - Forma directa I, directa II, cascada, paralela
 - Formas transpuestas
- **Estructuras FIR**
 - Forma directa, cascada, específica para sistemas de fase lineal, en celosía
- **Cuantización de coeficientes**

Problemas Opp: 6.27, 6.28, 6.39

Tema 5 – Diseño de filtros digitales

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

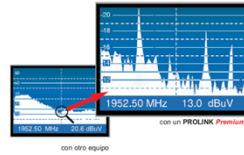
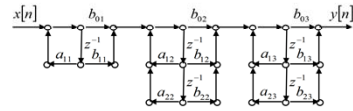
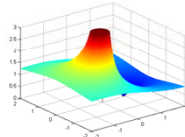
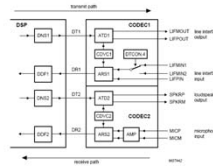
Oppenheim II (Cap. 7)

Proakis (Cap. 8)

Problemas Pro: 8.13, 8.14

Contexto programa

- 0. REPASO SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS.
- 1. MUESTREO DE SEÑALES CONTINUAS
- 2. TRANSFORMADA Z
- 3. ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI EN EL DOMINIO TRANSFORMADO
- 4. ESTRUCTURAS DE FILTROS DIGITALES
- **5. DISEÑO DE FILTROS DIGITALES**
- 6. PREDICCIÓN LINEAL Y FILTROS LINEALES ÓPTIMOS
- 7. CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (FFT)
- 8. ESTIMACIÓN ESPECTRAL DE POTENCIA

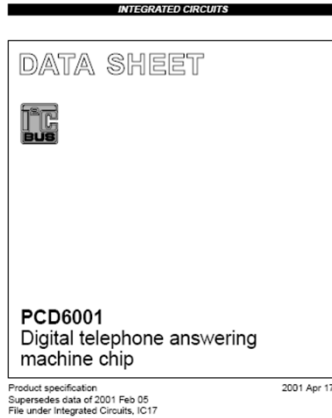


Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

2

Contexto profesional



Philips
Semiconductors

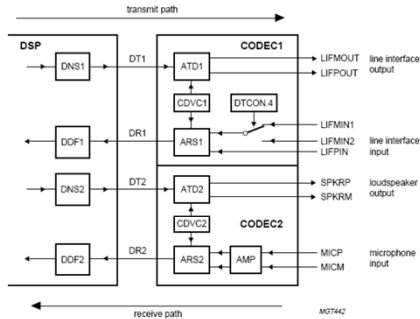
 **PHILIPS**

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

3

Contexto profesional



The main CODEC functions are (refer to Fig.29):

- AMP - Pre-amplifier
- ARS - Analog Receive Sigma delta ADC
- DDF - Digital Decimation Filter
- DNS - Digital Noise Shaper
- ATD - Analog Transmit DAC.

11.1 Interface to CODEC

The CODEC data buffers are used to exchange speech data between the DSP and the CODECs (see Fig.21). The digital decimation filter DDF writes equidistant in time 16-bit linear PCM samples to the DSP I/O registers CDC_DI0 to CDC_DI3 (address 01H to 04H for CODEC1 and address 09H to 0CH for CODEC2) at a rate of 32 kHz. The Digital Noise Shaper (DNS) reads equidistant in time 16-bit linear PCM samples from the DSP I/O registers CDC_DO0 to CDC_DO3 (address 05H to 08H for CODEC1 and address 0DH to 10H for CODEC2) at a rate of 32 kHz. The input registers CDC_DI0 to CDC_DI3 and the output registers CDC_DO0 to CDC_DO3 are also called data input/output DIO registers.

Contenido

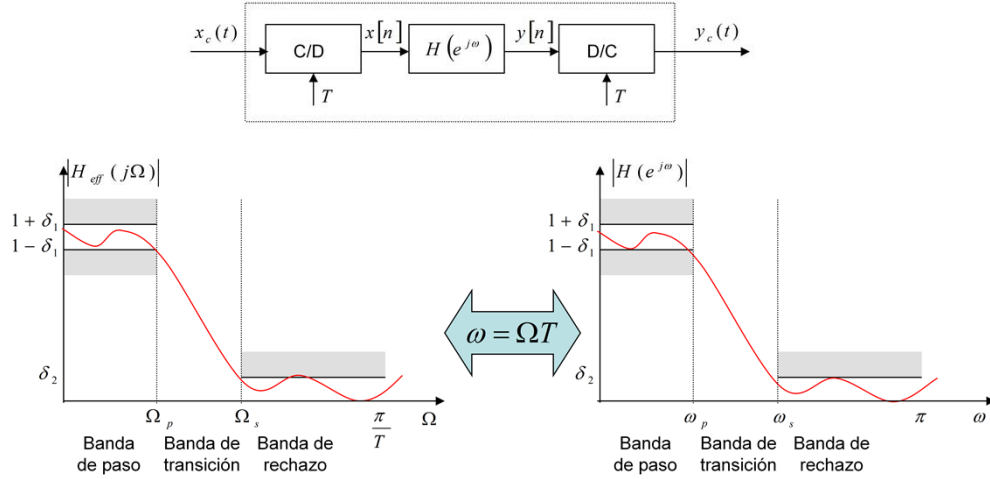
- Filtros IIR continuos
- Filtros IIR discretos
- Filtros FIR discretos
- Transformaciones de frecuencia

Diseño de filtros analógicos

- Applet:
 - http://www.wa4dsy.net/filter/hp_lp_filter.html
 - http://www.analog.com/en/amplifiers-and-comparators/products/dt-adisim-design-sim-tool/Filter_Wizard/resources/fca.html

Especificaciones

Procesado de señales continuas



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

7

Supondremos que las especificaciones están siempre en el dominio discreto.

Problemas Opp: 7.7

Diseño de filtros

- **Filtros IIR:**
 - Invarianza de la respuesta al impulso
 - +: control respuesta; -: aliasing, no paso alto, no rechazo banda
 - Transformación bilineal
- **Filtros FIR:**
 - Enventanado de la respuesta al impulso
 - Enventanado de Kaiser
 - Aproximaciones óptimas
 - Aproximaciones iterativas

Diseño de filtros IIR

Normalmente se transforma un filtro continuo porque:

- La tecnología de filtros IIR continuos estaba muy avanzada
- Los filtros IIR continuos se pueden expresar con fórmulas analíticas sencillas

La transformación debe mantener la causalidad y estabilidad del filtro continuo.

A hombros de gigantes

Pafnuti Chebyshev (1854)

- Ruso, 1821-1894
- Universidad San Petersburgo
- Profesor de Aleksandr Lyapunov y Andrei Markov
- Contribuciones a la probabilidad, la mecánica teórica, la teoría de la aproximación y la teoría de números
- Artículo sobre teoría de la mecánica



Willhelm Cauer (1926)

- Alemán, 1900-1945
- Technical Univ. Berlin
- Síntesis de filtros
- Artículo sobre la síntesis de filtros



Stephen Butterworth (1930)

- Inglés, 1885-1958
- Admiralty's Research Lab.
- Transmisiones por cables submarinos
- Artículo sobre teoría de amplificadores

“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

Filtros IIR continuos

Butterworth paso-bajo

- Respuesta maximalmente plana en la banda de paso
- Las primeras $2N-1$ derivadas en el origen del módulo al cuadrado de la respuesta son nulas
- El módulo de la respuesta es monotónica

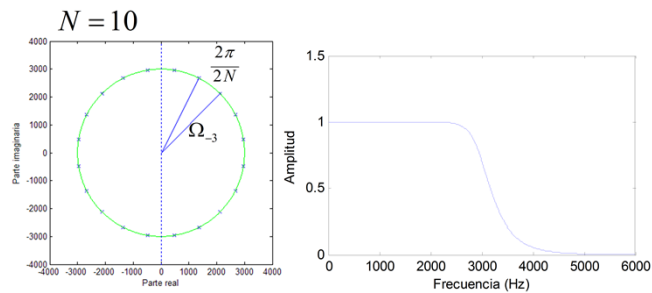
$$H(j\Omega)H^*(j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_{-3}}\right)^{2N}} \longrightarrow H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_{-3}}\right)^{2N}}$$

Polos

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_{-3}}\right)^{2N} = 0$$

$$s_k = (-1)^{\frac{k}{2N}} j\Omega_{-3} = \Omega_{-3} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi+2\pi k}{2N}}$$

$$k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$



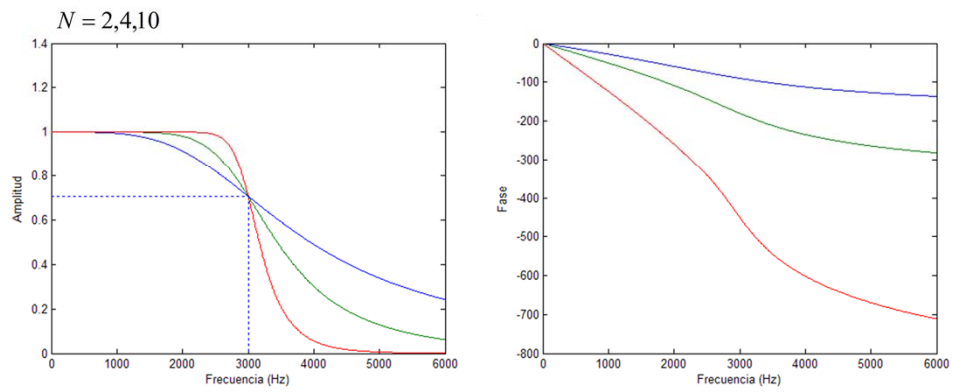
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

11

Filtros IIR continuos

Butterworth paso-bajo



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

12

Filtros IIR continuos

Chebyshev paso-bajo

- Tipo I: Equiripple en la banda de paso, monótonica en la banda de rechazo
- Tipo II: Equiripple en la banda de rechazo, monótonica en la banda de paso

Tipo I

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2\left(\frac{j\Omega}{j\Omega_p}\right)}$$

Polos

$$\alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}$$

$$a = \frac{1}{2}(\alpha^{\frac{1}{N}} - \alpha^{-\frac{1}{N}}) \quad \phi = \begin{cases} \frac{2\pi}{4N} & N = 2 \\ 0 & N \neq 2 \end{cases}$$

$$b = \frac{1}{2}(\alpha^{\frac{1}{N}} + \alpha^{-\frac{1}{N}})$$

$$s_k = \Omega_p (a \cos(\frac{2\pi k}{2N} + \phi) + jb \sin(\frac{2\pi k}{2N} + \phi))$$

$$k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Tipo II

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\varepsilon^2 V_N^2\left(\frac{j\Omega}{j\Omega_p}\right)\right)^{-1}}$$

Polinomios de Chebyshev

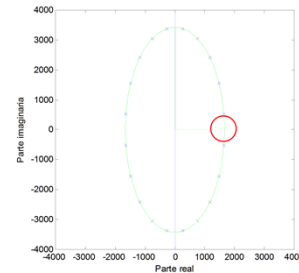
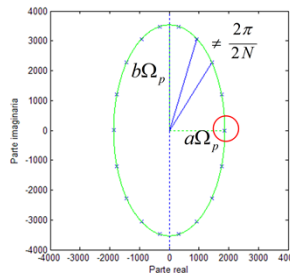
$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1}(x))$$

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow \cos^{-1}(x) \in R \rightarrow \text{ripple}$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \cos^{-1}(x) \in C \rightarrow \text{monotonic } V_N \approx \cosh$$

$$\begin{cases} V_0(x) = 1 \\ V_1(x) = x \\ V_2(x) = 2x^2 - 1 \\ \dots \end{cases}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

13

El coseno de un número complejo (z) se puede definir como la parte real de $\exp(i^*z)$.

Filtros IIR continuos

Chebyshev paso-bajo

- Tipo I: Equiripple en la banda de paso, monótonica en la banda de rechazo
- Tipo II: Equiripple en la banda de rechazo, monótonica en la banda de paso

Tipo I

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2\left(\frac{j\Omega}{j\Omega_p}\right)}$$

Polos

$$\mu = \frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}$$

$$s_k = \Omega_p \sinh(\mu) \cos\left(\frac{2\pi k + \pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right) + j\Omega_p \cosh(\mu) \sin\left(\frac{2\pi k + \pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Tipo II

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\varepsilon^2 V_N^2\left(\frac{j\Omega}{j\Omega_p}\right)\right)^{-1}}$$

Curso 2012/2013

Polinomios de Chebyshev

$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1}(x))$$

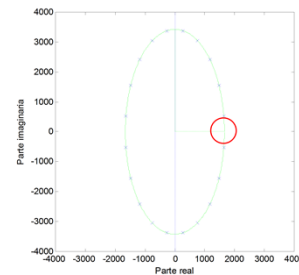
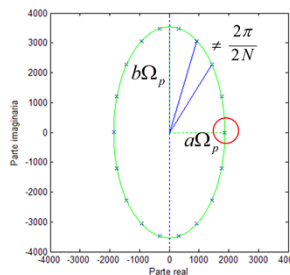
$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow \cos^{-1}(x) \in R \rightarrow \text{ripple}$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \cos^{-1}(x) \in C \rightarrow \text{monotonic } V_N \approx \cosh$$

$$N = 9$$

$$\begin{cases} V_0(x) = 1 \\ V_1(x) = x \\ V_2(x) = 2x^2 - 1 \\ \dots \end{cases}$$



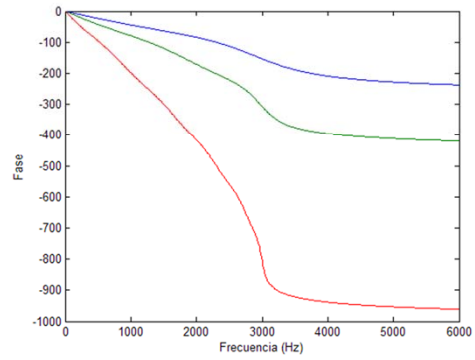
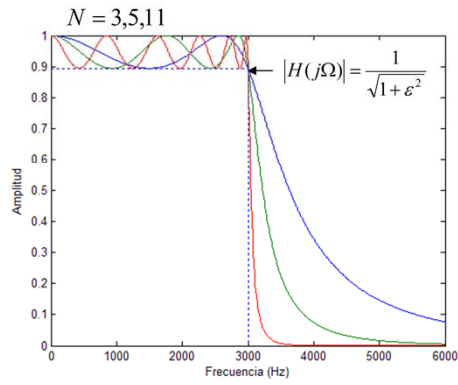
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

14

El coseno de un número complejo (z) se puede definir como la parte real de $\exp(i^*z)$. Los filtros de Chebyshev de orden par son inestables puesto que tienen un polo en el eje imaginario.

Filtros IIR continuos

Chebyshev paso-bajo



Curso 2012/2013

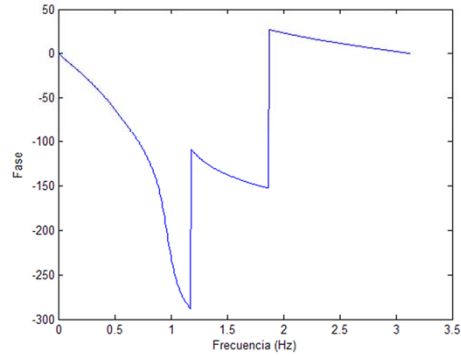
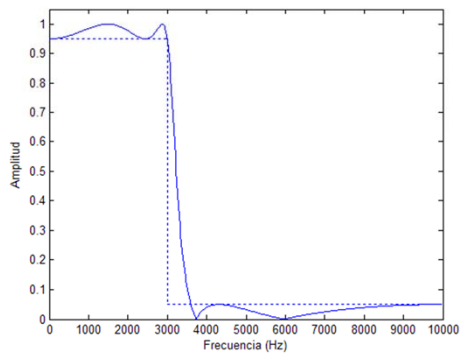
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

15

Filtros IIR continuos

Elíptico paso-bajo (Cauer)

•Equiripple en la banda de paso y de rechazo



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

16

Este filtro tiene ceros en el eje de frecuencias por lo que la fase es discontinua.

Problemas Pro: 8.15*, 8.16*

Diseño de filtros continuos

Butterworth

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$N = \frac{\log \frac{\delta}{\varepsilon}}{\log \frac{\Omega_s}{\Omega_p}}$$

Chebyshev

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \quad |H(j0)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

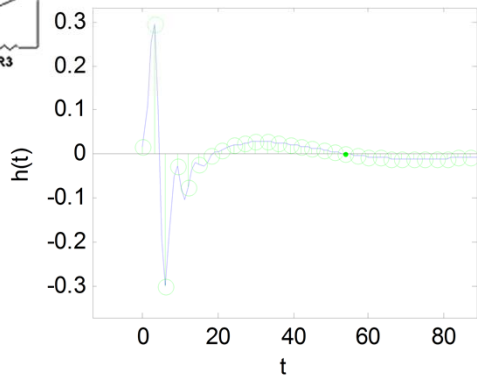
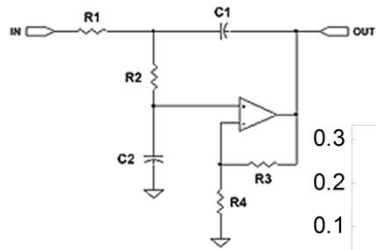
N impar

N par

$$\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$N = \frac{\cosh^{-1} \frac{\delta}{\varepsilon}}{\cosh^{-1} \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} = \frac{\log \left(\frac{\sqrt{1-\delta_2^2} + \sqrt{1-\delta_2^2(1+\varepsilon^2)}}{\varepsilon\delta_2} \right)}{\log \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^2 - 1} \right)}$$

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso



$$h[n] = T_d h_c(nT_d)$$

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

$$h[n] = T_d h_c(nT_d)$$

T_d no es el periodo de muestreo del sistema.

$$[\text{Tema 1}] \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(j(\frac{\omega}{T_d} - k\frac{2\pi}{T_d}))$$

Si $H_c(j\Omega)$ está limitada en banda $\left(|\Omega| < \frac{\pi}{T_d}\right)$, entonces $H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T_d}) \quad |\omega| < \pi$

Los filtros analógicos de interés están casi limitados en banda, pero siempre hay un cierto aliasing que se evita, no con el periodo T_d , sino diseñando el filtro continuo con especificaciones más rígidas.

Procedimiento:

- Expresar las especificaciones del filtro discreto en el continuo $\left(\Omega = \frac{\omega}{T_d}\right)$
- Diseñar el filtro continuo $H_c(s)$
- Expresar el filtro continuo en el espacio discreto $H(z)$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

19


Obtener un filtro en discreta a partir de la respuesta al impulso en continua

Problemas Opp: 7.24

Problemas Pro: 8.8*

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

Conversión Continuo → Discreto

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \xrightarrow{\text{Suponiendo que todos los polos son simples}} h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$


$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] = \sum_{k=1}^N T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n] \longrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

Filtros continuos estables se transforman en filtros discretos estables.

$$\operatorname{Re}\{s_k\} < 0 \Rightarrow |e^{s_k T_d}| < 1$$

Los polos se mapean fácilmente, pero no así los ceros. Los ceros en el discreto son una función de los polos y los coeficientes $T_d A_k$.

Se puede tener invarianza de la entrada que se desee (escalón)

Ejercicio: implementar el paso de [b,a] continuos a un conjunto de sistemas de segundo orden en paralelo en el discreto.

Problemas Opp: 7.9, 7.11, 7.13, 7.17, 7.19

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.17783 \end{array} \right\} \begin{array}{l} |\omega| \leq 0.2\pi \\ 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{array} \quad T_d = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 \\ |H_c(j\Omega)| \leq 0.17783 \end{array} \right\} \begin{array}{l} |\Omega| \leq 0.2\pi \\ 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{array} \quad \begin{array}{l} 0.89125 = |H_c(j0.2\pi)| \\ |H_c(j0.3\pi)| = 0.17783 \end{array}$$

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{-3}}\right)^{2N}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_{-3}}\right)^{2N} = \frac{1}{0.89125^2} \\ 1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_{-3}}\right)^{2N} = \frac{1}{0.17783^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = 5.8858 \rightarrow N = 6 \\ \Omega_{-3} = 0.70474 \end{array} \right.$$

sobre-especificaciones

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

Ejemplo:

$$1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_{-3}} \right)^{2N} = \frac{1}{0.89125^2} \longrightarrow 2N(\log 0.2\pi - \log \Omega_{-3}) = \log \left(\frac{1}{0.89125^2} - 1 \right)$$

$$1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_{-3}} \right)^{2N} = \frac{1}{0.17783^2} \longrightarrow 2N(\log 0.3\pi - \log \Omega_{-3}) = \log \left(\frac{1}{0.17783^2} - 1 \right)$$

$$2N \log \frac{0.3\pi}{0.2\pi} = \log \frac{\frac{1}{0.17783^2} - 1}{\frac{1}{0.89125^2} - 1} \longrightarrow N = 5.8858$$

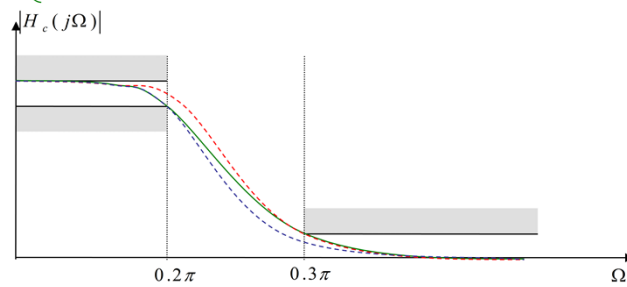
$$\Omega_{-3} = 0.2\pi \left(\frac{1}{0.89125^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2N}} = 0.70474$$

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

Ejemplo:

$$N = 6 \rightarrow \begin{cases} 1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_{-3}}\right)^{2N} = \frac{1}{0.89125^2} \Rightarrow \Omega_{-3} = 0.7032 \rightarrow \text{Menos aliasing} \\ 1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_{-3}}\right)^{2N} = \frac{1}{0.17783^2} \Rightarrow \Omega_{-3} = 0.7087 \end{cases}$$

$(\Omega_{-3} = 0.70474(N = 5.8858))$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

23

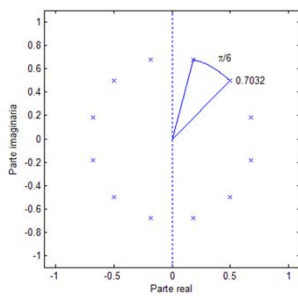
Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

Ejemplo:

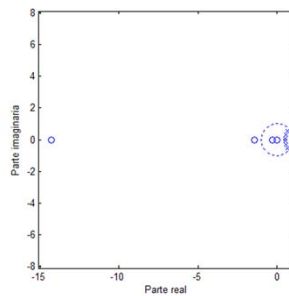
$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_{-3}} \right)^{2N} = 0 \longrightarrow s_k = (-1)^{\frac{k}{2N}} j\Omega_{-3} = 0.7032 e^{j\frac{\pi}{6}} e^{j\frac{\pi+2\pi k}{12}} \longrightarrow p_k = e^{T_d s_k}$$

$$k = 0, 1, \dots, 11$$

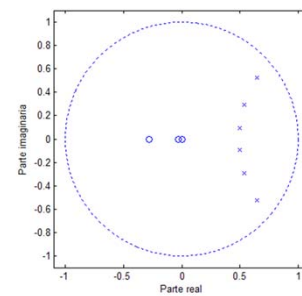
Continuo



Discreto



Discreto



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

24

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 H_c(s) &= \frac{0.12093}{(s^2 + 0.3640s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)} \\
 &= \frac{0.1435+0.2486i}{s-(-0.1820+0.6792i)} + \frac{0.1435-0.2486i}{s-(-0.1820-0.6792i)} \\
 &\quad - \frac{1.0714}{s-(-0.4972+0.4972i)} + \frac{-1.0714}{s-(-0.4972-0.4972i)} \\
 &\quad + \frac{0.9279-1.6071i}{s-(-0.6792+0.1820i)} + \frac{0.9279+1.6071i}{s-(-0.6792-0.1820i)} \\
 \\
 H(z) &= \frac{0.1435+0.2486i}{1-(0.6486+0.5237i)z^{-1}} + \frac{0.1435-0.2486i}{1-(0.6486-0.5237i)z^{-1}} \\
 &\quad - \frac{1.0714}{1-(0.5346+0.2901i)z^{-1}} + \frac{-1.0714}{1-(0.5346-0.2901i)z^{-1}} \\
 &\quad + \frac{0.9279-1.6071i}{1-(0.4986+0.0918i)z^{-1}} + \frac{0.9279+1.6071i}{1-(0.4986-0.0918i)z^{-1}}
 \end{aligned}$$

Curso 2012/2013

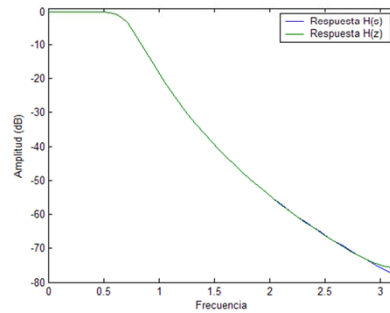
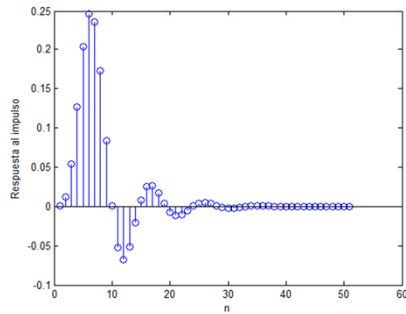
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

25

Diseño IIR: Invarianza de la respuesta al impulso

Ejemplo:

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2972z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.069z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9973z^{-1} + 0.2571z^{-2}}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

26

La diferencia en las colas de los filtros se debe al aliasing

Problemas Opp: 7.1*, 7.2*

Problemas Pro: 8.10

Diseño IIR: Transformación bilineal

Idea: Mapear todo el eje de frecuencias continuas en el círculo unidad.

+ : No hay aliasing como en la invarianza de la respuesta al impulso

- : Hay una distorsión no lineal del filtro (sólo vale para filtros constantes a intervalos)

$$H(z) = H_c \left(\frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right) \quad T_d \text{ no es el periodo de muestreo del sistema.}$$

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \leftrightarrow z = \frac{1 + \frac{T_d}{2}s}{1 - \frac{T_d}{2}s}$$

$$z = \frac{1 + \frac{T_d}{2}(\sigma + j\omega)}{1 - \frac{T_d}{2}(\sigma + j\omega)} \rightarrow \begin{cases} \sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1 \\ \sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1 \\ \sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Filtros causales y estables continuos se} \\ \text{mapean en filtros causales y estables discretos} \end{array}$$

$$z = e^{j\omega} \leftrightarrow s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2}{T_d} \left(\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}})} \right) = \frac{2}{T_d} \left(\frac{j \sin(\frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{\omega}{2})} \right) = j \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \leftrightarrow \omega = 2 \arctan \frac{\Omega T_d}{2}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

27

Por ejemplo, un diferenciador continuo no es constante a intervalos y su transformación bilineal resulta en una compresión no lineal que da lugar a un filtro que no es un diferenciador discreto

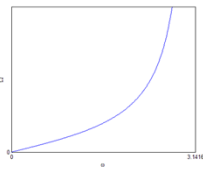
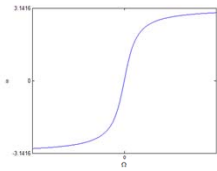
Problemas Opp: 7.10, 7.12, 7.14, 7.18, 7.20, 7.21*, 7.22*, 7.23*, 7.25, 7.26, 7.40, 7.41

Problemas Pro: 8.11, 8.12, 8.17*, 8.18*, 8.21, 8.23

Diseño IIR: Transformación bilineal

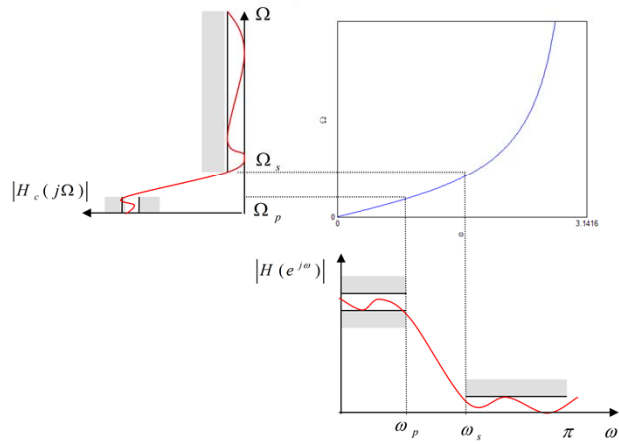
Cambio de variable

$$\omega = 2 \arctan \frac{\Omega T_d}{2}$$



$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Especificaciones del filtro



Applet: <http://www.dsptutor.freeuk.com/IIRFilterDesign/IIRFiltDes102.html>

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

28

Diseño IIR: Transformación bilineal

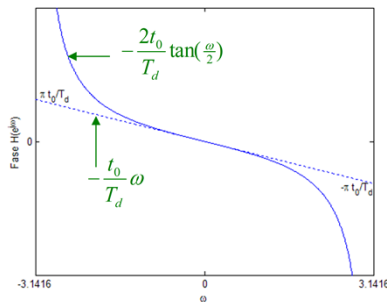
Distorsión de fase

Ejemplo: Retardo continuo $H_c(s) = e^{-st_0}$ → Fase lineal

$$H_c(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0}$$

$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{2}{T_d} \tan(\frac{\omega}{2}) t_0}$ → Fase no lineal

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) t_0 \approx -\frac{2}{T_d} t_0 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{2}\right)^3 + \dots\right)$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

29

Diseño IIR: Transformación bilineal

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.17783 \end{array} \right\} \begin{array}{l} |\omega| \leq 0.2\pi \\ 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{array} \quad T_d = 1 \Rightarrow \Omega = 2 \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

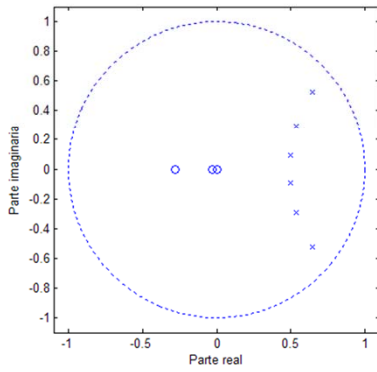
$$\left. \begin{array}{l} 0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1 \\ |H_c(j\Omega)| \leq 0.17783 \end{array} \right\} \begin{array}{l} |\Omega| \leq 2 \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) \\ 2 \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq |\Omega| \leq \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} 0.89125 = |H_c(j0.6498)| \\ |H_c(j1.0191)| = 0.17783 \end{array}$$

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{-3}}\right)^{2N}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{0.6498}{\Omega_{-3}}\right)^{2N} = \frac{1}{0.89125^2} \\ 1 + \left(\frac{1.0191}{\Omega_{-3}}\right)^{2N} = \frac{1}{0.17783^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = 5.3044 \rightarrow N = 6 \\ \Omega_{-3} = 0.7662 \end{array} \right.$$

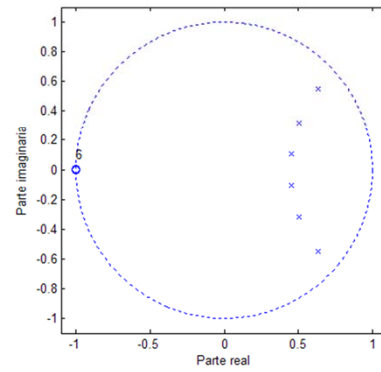
sobre-especificaciones

Diseño IIR: Transformación bilineal

Invarianza de la respuesta al impulso



Transformación bilineal



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

31

Problemas Opp: 7.3, 7.4

Diseño IIR: Transformación bilineal

Ejemplo:

$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

$$H(z) = 0.20238 \frac{0.1325 + 0.2650z^{-1} + 0.1325z^{-2}}{1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2}} \frac{0.1481 + 0.2691z^{-1} + 0.1481z^{-2}}{1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2}} \frac{0.1859 + 0.3717z^{-1} + 0.1859z^{-2}}{1 - 1.2686z^{-1} + 0.7051z^{-2}}$$

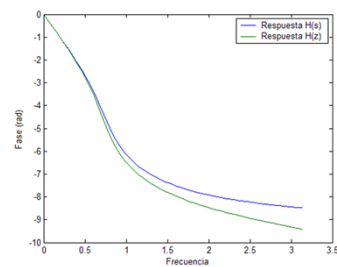
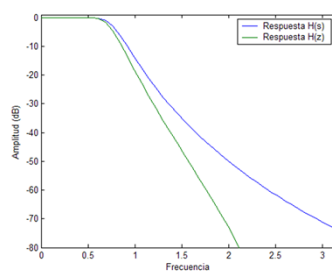
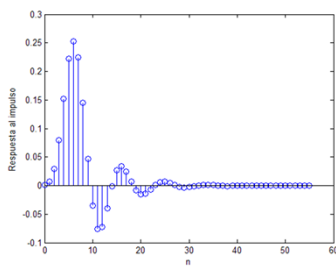
$$H(z) = 0.20238 \frac{0.1325(1+z^{-1})^2}{1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2}} \frac{0.1481(1+z^{-1})^2}{1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2}} \frac{0.1859(1+z^{-1})^2}{1 - 1.2686z^{-1} + 0.7051z^{-2}}$$

$$= 0.0007378 \frac{(1+z^{-1})^2}{1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2}} \frac{(1+z^{-1})^2}{1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2}} \frac{(1+z^{-1})^2}{1 - 1.2686z^{-1} + 0.7051z^{-2}}$$

Diseño IIR: Transformación bilineal

Ejemplo:

$$H(z) = 0.0007378 \frac{(1+z^{-1})^2}{1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2}} \frac{(1+z^{-1})^2}{1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2}} \frac{(1+z^{-1})^2}{1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2}}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

33

La diferencia en las colas de los filtros se debe a la transformación bilineal. Las especificaciones se exceden por diseño por el lado de la banda de paso. Pero se exceden con mucho en la banda de rechazo debido a la compresión. La influencia sobre la fase en este caso no es tan importante pero se sigue comprobando que la influencia crece conforme aumenta la frecuencia, es decir, a baja frecuencia la fase del sistema discreto es una buena aproximación de la fase del sistema continuo.

Diseño de filtros

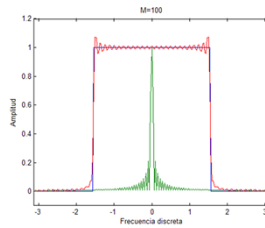
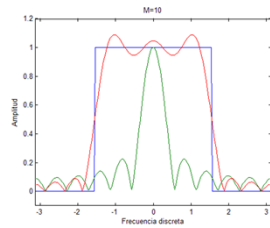
- **Filtros IIR:**
 - Invarianza de la respuesta al impulso
 - +: control respuesta; -: aliasing, no paso alto, no rechazo banda
 - Transformación bilineal
- **Filtros FIR:**
 - Enventanado de la respuesta al impulso
 - Enventanado de Kaiser
 - Aproximaciones óptimas
 - Aproximaciones iterativas

Diseño FIR: Enventanado de la respuesta al impulso

$$H_d(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{TF^{-1}} h_d[n] \xleftrightarrow{\text{truncamiento}} h[n] = h_d[n]w[n]$$

$$\begin{aligned} &\uparrow TF \\ H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

Ejemplo: $w[n] = u[n] - u[n - (M + 1)]$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

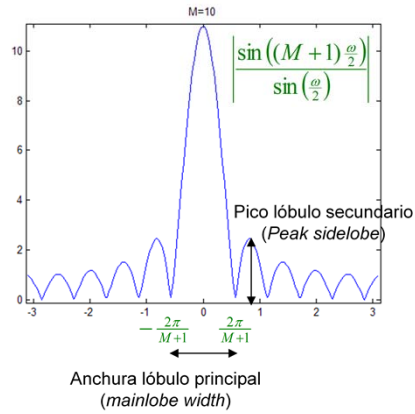
35

La Hd es la H deseada

Diseño FIR: Enventanado de la respuesta al impulso

Objetivos:

- Soporte pequeño de la ventana para realizar pocos cálculos
- Distorsión mínima de la respuesta en frecuencia



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

36

Diseño FIR: Enventanado de la respuesta al impulso

Ventana rectangular (Dirichlet)	$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Ventana triangular (Bartlett)	$w[n] = \begin{cases} \frac{2}{M}n & 0 \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 2 - \frac{2}{M}n & \frac{M}{2} < n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Ventana Hanning	$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi \frac{2}{M}n) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Ventana Hamming	$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(\pi \frac{2}{M}n) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Ventana Parzen	$w[n] = \begin{cases} 1 - 6(\frac{2}{M}(n - \frac{M}{2}))^2 (1 - \frac{ n - \frac{M}{2} }{\frac{M}{2}})^3 & 0 \leq n - \frac{M}{2} \leq \frac{M}{4} \\ 2(1 - \frac{ n - \frac{M}{2} }{\frac{M}{2}})^3 & \frac{M}{4} < n - \frac{M}{2} \leq \frac{M}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Todas las ventanas tienen fase lineal

A hombros de gigantes

Lejeune Dirichlet

- Matemático alemán, 1805-1859
- Universidad Berlin
- Profesor de Ferdinand Eisenstein, Leopold Kronecker, y Rudolf Lipschitz
- Contribuciones al análisis



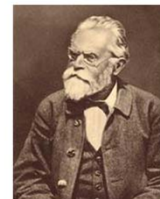
Maurice Bartlett

- Estadístico inglés, 1910-2002
- University College London
- Trabajó con Jerzy Neyman, Egon Pearson, Ronald Fisher y John Wishart
- Contribuciones al análisis estadístico



Julius von Hann

- Meteorólogo austriaco, 1839-1921
- University Graz
- Su ventana la introdujeron Ralph Blackman y John Tukey en 1959



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

38

“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

A hombros de gigantes

Richard Hamming

- Matemático estadounidense, 1915-1998
- Bell Labs
- Trabajó con Claude Shannon
- Contribuciones al diseño de filtros



Emanuel Parzen (1962)

- Estadístico estadounidense, 1929-
- Univ. Texas
- Estimación de funciones densidad de probabilidad



James Kaiser (1974)

- Estadístico estadounidense, 1929-
- Univ. Duke
- Diseño de filtros



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

39

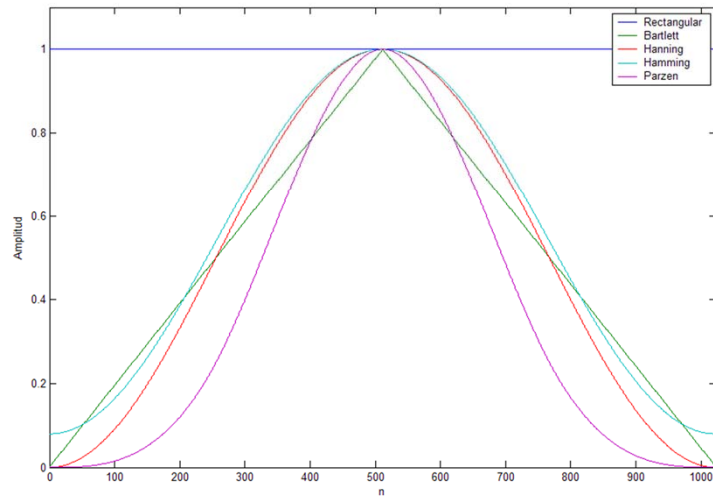
“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

Información del Vocoder:

<http://www.music.psu.edu/Faculty%20Pages/Ballora/INART55/vocoder.html>,

<http://en.wikipedia.org/wiki/Vocoder>

Diseño FIR: Enventanado de la respuesta al impulso

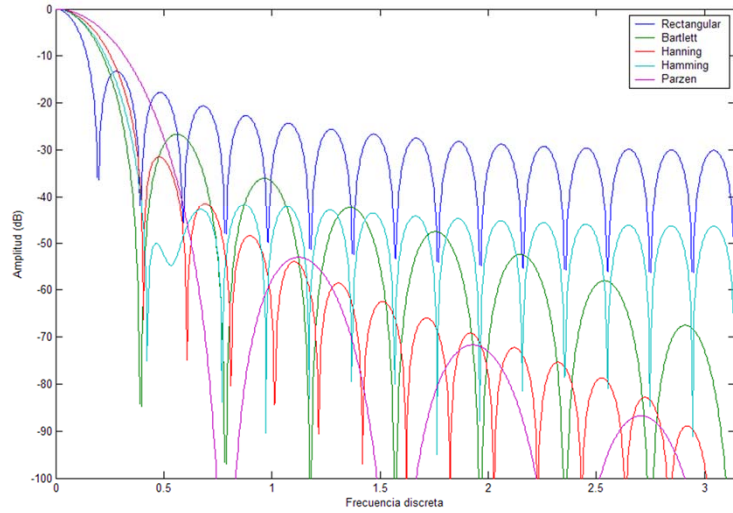


Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

40

Diseño FIR: Enventanado de la respuesta al impulso



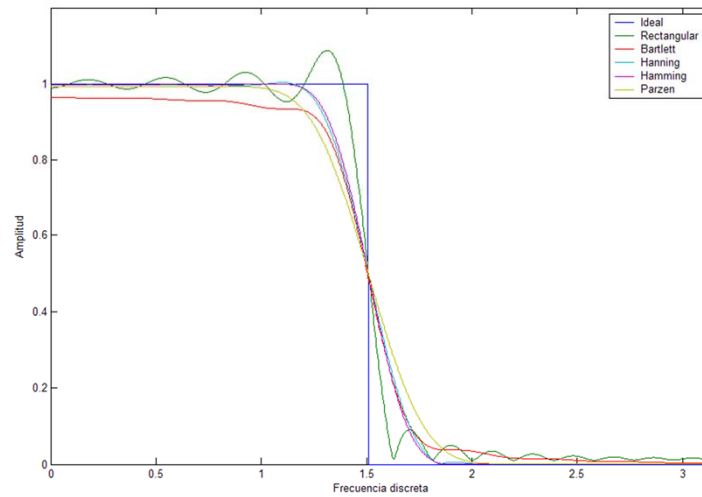
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

41

Ejercicio: Repetir esta gráfica

Diseño FIR: Enventanado de la respuesta al impulso



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

42

Ejercicio: Repetir esta gráfica

Problemas Opp: 7.15, 7.33, 7.34*

Problemas Pro: 8.1*, 8.2*, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.9*, 8.22, 8.25

Diseño FIR: Enventanado de la respuesta al impulso

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

Applet: <http://www.falstad.com/dfilter/index.html>

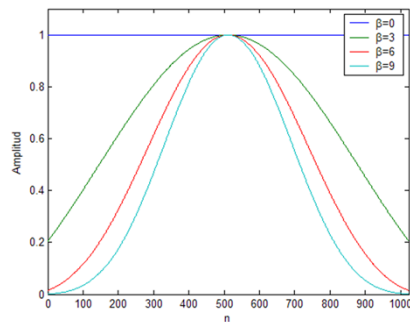
Diseño FIR: Ventanas de Kaiser

¿Cuál es la ventana que está máximamente concentrada en $\omega=0$?

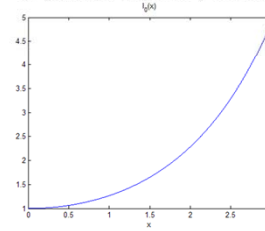
Sol. Óptima: Prolate Spheroidal Wave functions

Sol. Cuasi-óptima: Ventanas de Kaiser

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2}{M}n-1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



I_0 Función modificada de Bessel de primera especie y orden 0

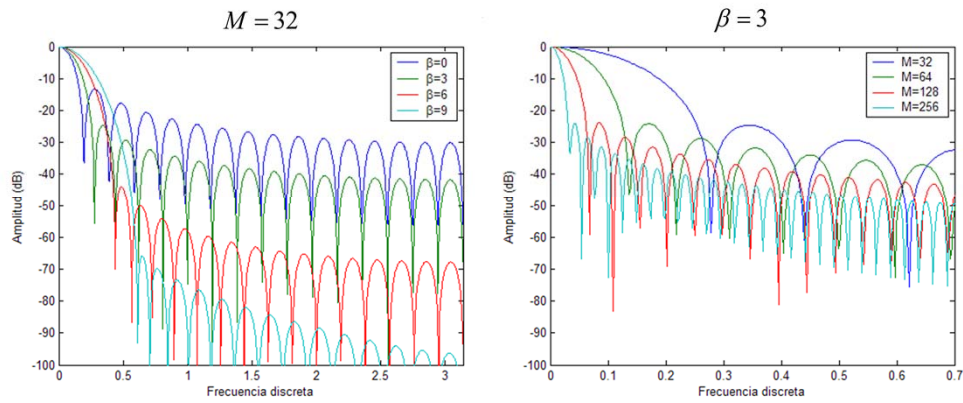


Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

44

Diseño FIR: Ventanas de Kaiser



Curso 2012/2013

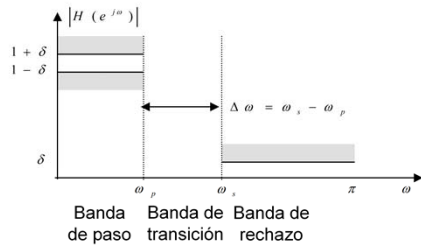
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

45

Obsérvese que para un mismo Beta la altura del segundo lóbulo es siempre la misma

Diseño FIR: Ventanas de Kaiser

Ecuaciones de diseño para filtros paso bajo



- Si un filtro tiene ganancia K, el rizado consiguiente es $K\delta$
- Si en un filtro hay dos escalones, puede haber zonas donde se sumen los rizados de cada lado

$$\Delta \omega = \omega_s - \omega_p$$

$$A = -20 \log_{10} \delta$$

$$\beta = \beta(\delta) = \begin{cases} 0.1102 (A - 8.7) & A > 50 \\ 0.5842 (A - 21)^{0.4} + 0.07886 (A - 21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A - 8}{2.285 \Delta \omega}$$

Diseño FIR: Ventanas de Kaiser

Ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} 0.975 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & \quad |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.1 & \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \delta &= \min(1 - 0.975, 0.1) = 0.025 \\ A &= -20 \log_{10} \delta = 32.04 \\ \Delta\omega &= 0.1\pi \end{aligned}$$

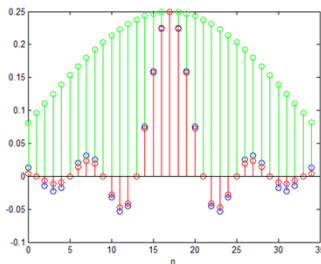


$$h'[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right) w[n] \leftarrow \omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$

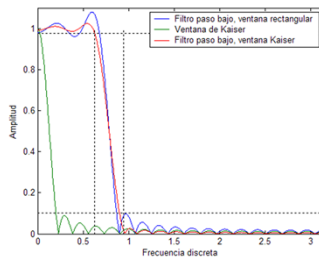
$$h[n] = h'\left[n - \frac{M-1}{2}\right]$$

$$\beta = 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) = 2.40$$

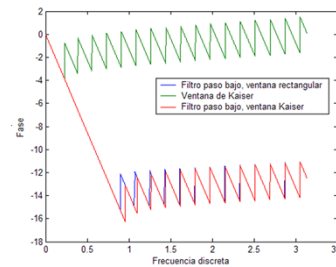
$$M = \frac{32.04 - 8}{2.285 \cdot 0.1\pi} = 33.49 \rightarrow 35$$



Curso 2012/2013



Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)



47

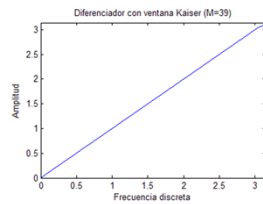
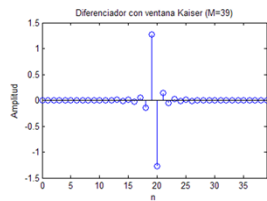
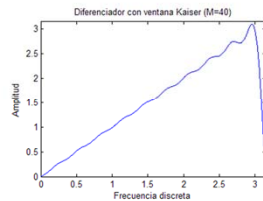
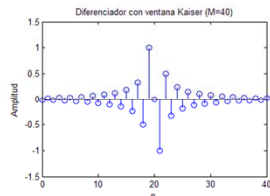
M la approximo al impar más próximo por arriba. El código de colores de la respuesta en el tiempo es el mismo que en frecuencia. Ejercicio: Repetir estas gráficas

Diseño FIR: Ventanas de Kaiser

Ejemplo: Diferenciador discreto

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = j\omega e^{-j\frac{M}{2}\omega} \longleftrightarrow h_{diff}[n] = \frac{\cos \pi(n - \frac{M}{2})}{n - \frac{M}{2}} - \frac{\sin \pi(n - \frac{M}{2})}{\pi(n - \frac{M}{2})^2} \longleftrightarrow h[n] = h_{diff}[n]w[n]$$

$\beta = 2.40$



Applet:

<http://www.dsptutor.freeuk.com/KaiserFilterDesign/KaiserFilterDesign.html>

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

48

Aquí se ve que el diseño con un filtro de Kaiser mantiene las mismas propiedades de Filtro de fase lineal de tipo III o de tipo IV. En este caso es especialmente problemático porque hay un ripple importante si M es par

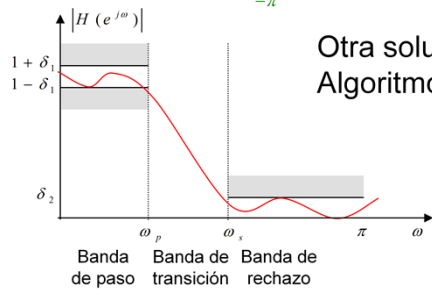
Problemas Opp: 7.5*, 7.6, 7.16, 7.35

Diseño FIR: Aproximaciones óptimas

- ¿Qué es lo mejor que puedo obtener para un orden de filtro dado?
- Sol: Depende de la definición de mejor

Ej: Si la respuesta al impulso deseada es $h_d[n]$, entonces

$$h[n] = \min_{h[n]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega = \begin{cases} h_d[n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Otra solución:
Algoritmo de Parks-McClellan

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

49

Problemas Opp: 7.32, 7.37

Problemas Pro: 8.20

A hombros de gigantes

Thomas Parks (1972)

- Ingeniero estadounidense
- Universidad Cornell
- Diseño de filtros



James McClellan (1972)

- Ingeniero estadounidense
- Georgia Institute of Technology
- Alumno de Thomas Parks



Evgeny Remez (1934)

- Matemático ruso, 1896-1975
- Algoritmo de Remez de intercambio



Alan V. Oppenheim (1971)

- Ingeniero estadounidense
- MIT



A new technique for the design of nonrecursive digital filters – Hofstetter, Oppenheim, et al. - 1971

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

50

“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

Jim McClellan implementó en clase (su profesor era T. Parks) un algoritmo de Hofstetter y Oppenheim. Al arreglar algunos problemas sacaron un algoritmo muy potente.

Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

En vez de el error cuadrático, se minimiza el error máximo

$$h[n] = \min_{h[n]} \max |W(e^{j\omega})| |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|$$

↑
Función de peso

Solución: Tma. de alternancia

Sea A un conjunto cerrado y acotado (compacto) en R .

Sea $P_r(x)$ un polinomio de grado r y $f(x)$ una función continua en A

Sea $E_r(x) = W(x)(f(x) - P_r(x))$ el error en cada punto. Se considera la norma $\|f(x)\|_\infty = \max_{x \in A} |f(x)|$ en el espacio de las funciones continuas en A

Entonces, $P_r(x)$ es el único polinomio de grado r que minimiza $\|E_r(x)\|_\infty$ sii

$E_r(x)$ tiene al menos $r+2$ valores en A tales que $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+2}$ y

$E_r(x_i) = -E_r(x_{i+1}) = \pm \|E_r(x)\|_\infty$ para $i = 1, 2, \dots, r+1$

$$H(e^{j\omega}) = \min_{H(e^{j\omega})} \|W(e^{j\omega})(H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega}))\|_\infty$$

Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

Supongamos un filtro FIR de fase lineal de tipo I $h[n] = h[-n]$
 (es trivial convertir este sistema en un sistema causal con la
 misma respuesta de amplitud con un retardo de L muestras)

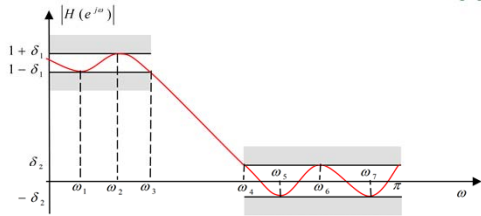
$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-L}^L h[n]e^{-j\omega n} = h[0] + \sum_{n=1}^L 2h[n]\cos(\omega n) \\
 &= h[0] + \sum_{n=1}^L 2h[n]T_n(\cos \omega) = \sum_{n=0}^L a_n(\cos \omega)^n = P(x)|_{x=\cos \omega} \\
 &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
 &T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \qquad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(x - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)
 \end{aligned}$$

Polinomio de Chebyshev de 1^{er} orden

Los a_n serán más o menos complicados pero serán una combinación de los $h[n]$. $W(e^{j\omega})$ es una función de peso que le da más o menos importancia a los errores

Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

Ej: Para el filtro paso bajo $h[n] = \min_{h[n]} \max |W(e^{j\omega})| |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|$



Banda de paso Banda de transición Banda de rechazo

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = P(x)|_{x=\cos\omega} = \sum_{n=0}^L a_n (\cos \omega)^n$$

$$H(e^{j\omega}) = \min_{H(e^{j\omega})} \left\| W(e^{j\omega}) (H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})) \right\|_{\infty} = \min_{H(e^{j\omega})} \left\| W(e^{j\omega}) \left(\sum_{n=0}^L a_n (\cos \omega)^n - H_d(e^{j\omega}) \right) \right\|_{\infty}$$

Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

Ej: Para el filtro paso bajo

$$H(e^{j\omega}) = \min_{H(e^{j\omega})} \left\| W(e^{j\omega}) \left(\sum_{n=0}^L a_n (\cos \omega)^n - H_d(e^{j\omega}) \right) \right\|_{\infty}$$

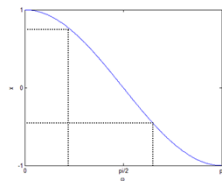
$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \min_{H(e^{j\omega})} \left\| W(x) \left(\sum_{n=0}^L a_n x^n - H_d(x) \right) \right\|_{\infty} = \min_{H(e^{j\omega})} \|E_L(x)\|_{\infty}$$

$$W(x) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & \cos \omega_p \leq x \leq 1 \\ 1 & -1 \leq x \leq \cos \omega_s \end{cases}$$

$$H_d(x) = \begin{cases} 1 & \cos \omega_p \leq x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x \leq \cos \omega_s \end{cases}$$



$$x = \cos \omega$$

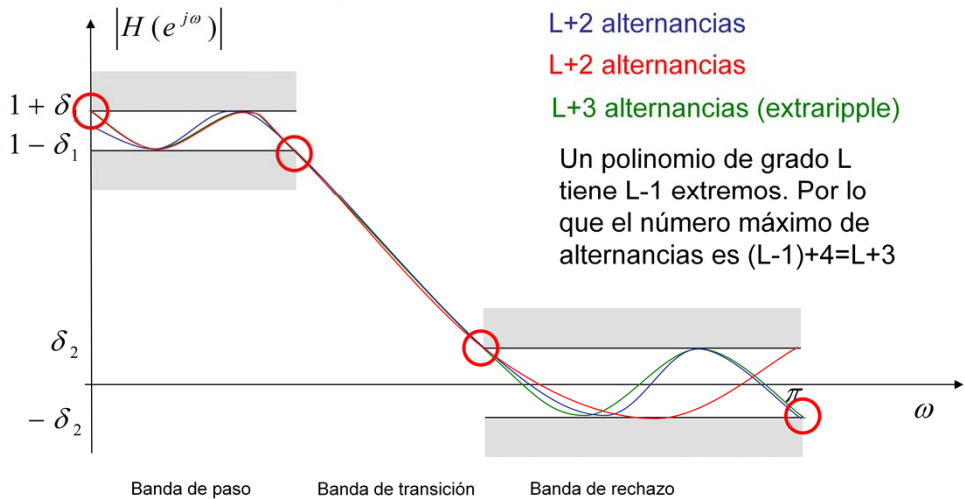
Tma. de la alternancia

$E_L(x)$ tiene al menos $L+2$ alternancias.

Pero puede tener más

Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

Ej: Para el filtro paso bajo $L = 5$



Curso 2012/2013

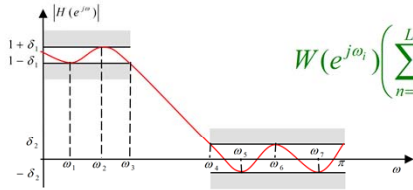
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

55

Problemas Opp: 7.36, 7.38, 7.39, 7.47, 7.48, 7.49, 7.55, 7.56, 7.57

Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

El Tma. de alternancia garantiza la existencia de un filtro de orden L, pero no dice cómo calcularlo.



$$W(e^{j\omega_i}) \left(\sum_{n=0}^L a_n (\cos \omega_i)^n - H_d(e^{j\omega_i}) \right) = (-1)^{i+1} \delta \quad i = 1, 2, \dots, L+2$$

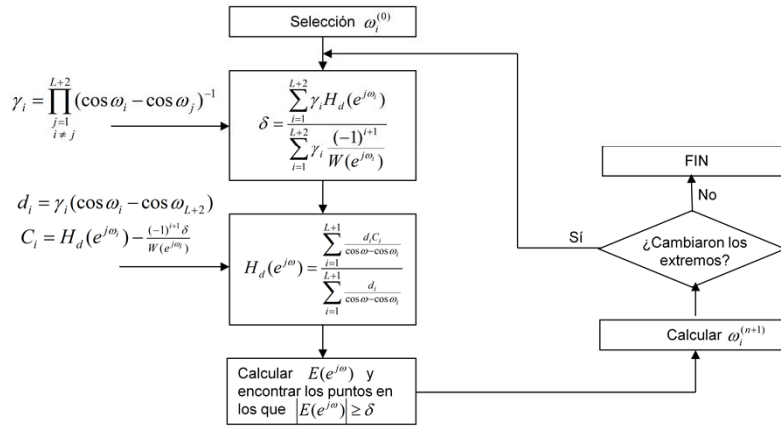
Banda de paso Banda de transición Banda de rechazo

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \omega_1 & (\cos \omega_1)^2 & \dots & (\cos \omega_1)^L & \frac{1}{W(\omega_1)} \\ 1 & \cos \omega_2 & (\cos \omega_2)^2 & \dots & (\cos \omega_2)^L & \frac{-1}{W(\omega_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos \omega_{L+2} & (\cos \omega_{L+2})^2 & \dots & (\cos \omega_{L+2})^L & \frac{(-1)^{L+2}}{W(\omega_{L+2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_d(e^{j\omega_1}) \\ H_d(e^{j\omega_2}) \\ \dots \\ H_d(e^{j\omega_{L+2}}) \end{pmatrix}$$

Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

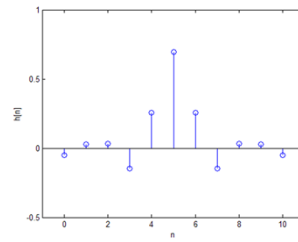
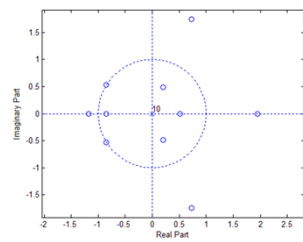
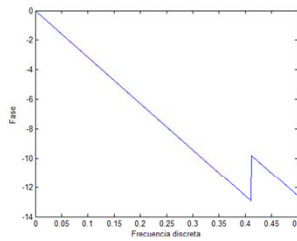
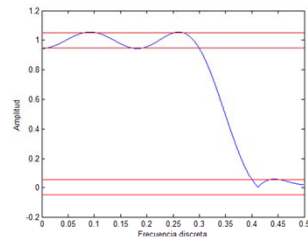
Para resolver este sistema utilizaremos un algoritmo iterativo:

Algoritmo iterativo de Remez



Diseño FIR: Alg. Parks-McClellan

Ej: Filtro paso bajo $\delta_1 = \delta_2 = 0.05$ $\omega_p = 0.3$ $\omega_s = 0.4$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

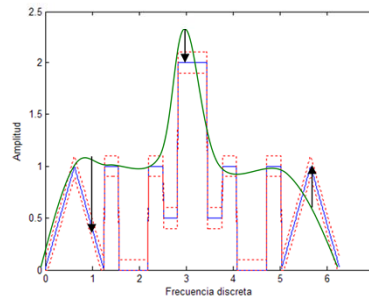
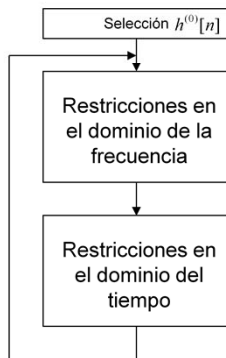
58

Problemas Opp: 7.8*

Diseño FIR: Aproximaciones iterativas

Restricciones en el dominio de la frecuencia $|H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})| < \delta(e^{j\omega})$

Restricciones en el dominio del tiempo $h[n] = 0 \quad \forall n > N$

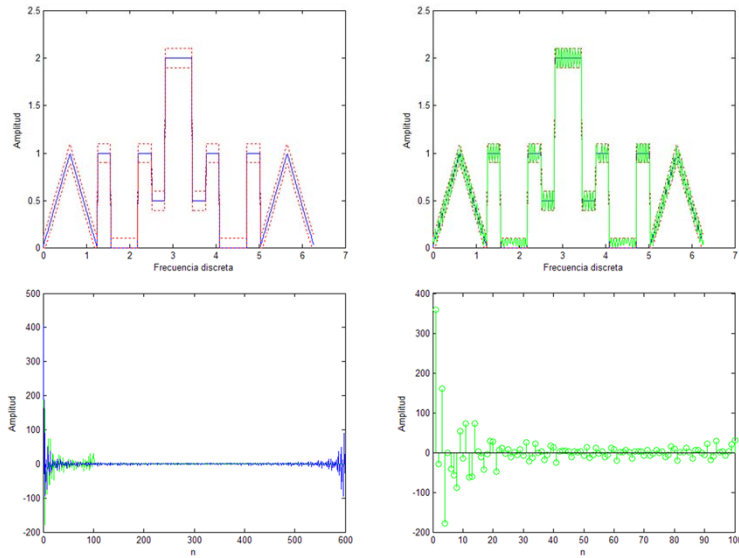


Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

59

Diseño FIR: Aproximaciones iterativas



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

60

Transformaciones de frecuencia

Sea $H(z)$ un filtro paso bajo con frecuencia de corte ω_p

Nuevo filtro	Transformación	Parámetros
Paso bajo	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	ω'_p nueva frec. de corte $a = \frac{\sin \frac{\omega_p - \omega'_p}{2}}{\sin \frac{\omega_p + \omega'_p}{2}}$
Paso alto	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	ω'_p nueva frec. de corte $a = -\frac{\cos \frac{\omega_p + \omega'_p}{2}}{\cos \frac{\omega_p - \omega'_p}{2}}$
Paso banda	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	ω_l, ω_u nuevas frec. de corte (lower-upper) $K = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2}$ $\alpha = \frac{\cos \frac{\omega_l + \omega_u}{2}}{\cos \frac{\omega_u - \omega_l}{2}}$ $a_1 = \frac{2\alpha}{1+K}$ $a_2 = \frac{1-K}{1+K}$

Problemas Opp: 7.28, 7.29*, 7.30, 7.31

Transformaciones de frecuencia

Ej: Filtro paso bajo

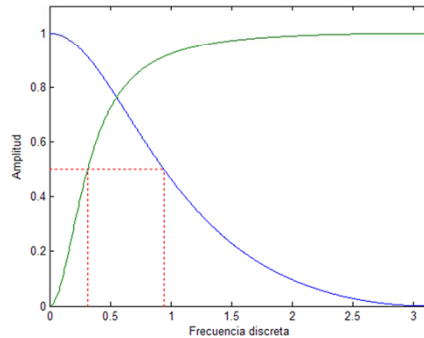
$$H_{lp}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}} H_{hp}(z) = \frac{b_0 - b_1 \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}}{1 + a_1 \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}} = \frac{(b_0 - b_1 a) + (b_0 a - b_1) z^{-1}}{(1 + a_1 a) + (a + a_1) z^{-1}}$$

Butterworth (N=1, $\omega_p = 0.94$)

$$H_{lp}(z) = \frac{0.3375 + 0.3375z^{-1}}{1 - 0.3249z^{-1}}$$

$$\omega'_p = 0.31$$

$$H_{hp}(z) = \frac{0.6247 - 0.6247z^{-1}}{0.7236 - 0.5257z^{-1}}$$



Resumen

- Filtros IIR continuos
 - Butterworth, Chebyshev, Cauer
- Filtros IIR discretos
 - Invarianza de la respuesta al impulso
 - Transformación bilineal
- Filtros FIR discretos
 - Enventanado de la respuesta al impulso
 - Enventanado de Kaiser
 - Aproximaciones óptimas: Alg. Parks-McClellan
 - Aproximaciones iterativas
- Transformaciones de frecuencia
 - Filtros paso alto, filtros paso banda

Applet: http://cisco.cscs.wmin.ac.uk/filter_design.html
MATLAB: fdatool

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

63

Problemas Opp: 7.27, 7.42, 7.43, 7.44, 7.45, 7.46, 7.50, 7.51, 7.52, 7.53, 7.54, 7.58

Problemas Pro: 8.19*, 8.26, 8.27, 8.28, 8.29, 8.30

Tema 6 – Predicción lineal y filtros lineales óptimos

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Proakis (Cap. 11)

A hombros de gigantes

Homer Dudley (1939)
 • Estadounidense, 1896-1987
 • Bell Labs
 • Teoría de la voz y el sonido
 • Diseño del vocoder

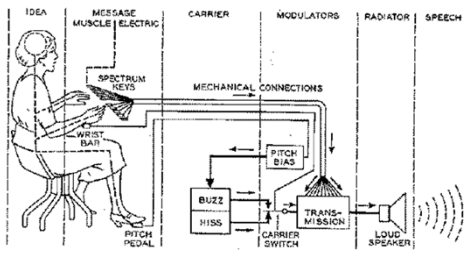
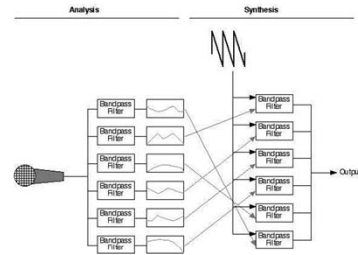


Fig. 8—Schematic circuit of the vocoder.

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
 (EPS-San Pablo CEU)

2

“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

Información del Vocoder:

<http://www.music.psu.edu/Faculty%20Pages/Ballora/INART55/vocoder.html>,

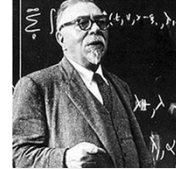
<http://en.wikipedia.org/wiki/Vocoder>

A hombros de gigantes

Codificación predictiva

Norbert Wiener (1940)

- Estadounidense, 1894-1964
- Doctor a los 18 años
- Estudió con Bertrand Russell (lógica y conjuntos), Godfrey Hardy (teoría de números y análisis), David Hilbert (análisis para mecánica cuántica y relatividad general), Edmund Landau (análisis complejo)
- En la Segunda Guerra Mundial trabajó sobre las baterías antiaéreas, como el avión se mueve debía predecir la posición de éste cuando el proyectil impactara



Claude Shannon (1948)

- Estadounidense, 1916-2001
- Bell Labs con Harry Nyquist y (Walter Brattain, John Bardeen y William Shockley)
- Artículo sobre codificación predictiva



A hombros de gigantes

Peter Elias (1955)

- Estadounidense, 1923-2001
- MIT
- Artículo sobre codificación predictiva



Peter Elias (right) with Jacob Ziv at the Monte Verita Symposium in Ascona, Switzerland, February 1994.

Bishnu Atal (1967)

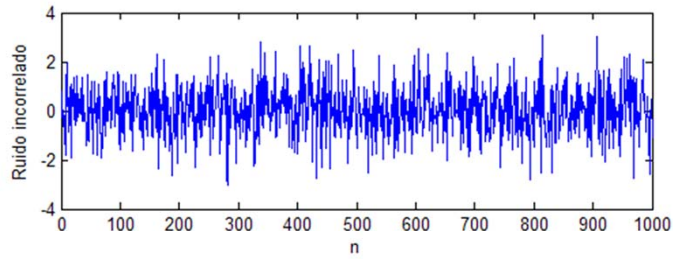
- Indio, 1933-
- Bell Labs
- Artículo sobre codificación predictiva



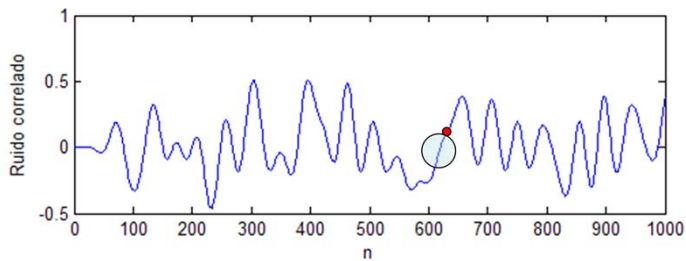
Contenido

- Predicción lineal hacia delante
 - Ecuaciones de Yule-Walker
 - Algoritmo de Levinson-Durbin
- Innovación de procesos aleatorios
 - Procesos AR, MA, y ARMA
- Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Predicción lineal hacia delante



$x[n]$ Proceso aleatorio incorrelado



$x[n]$ Proceso aleatorio correlado

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^p a_p[k] x[n-k]$$
$$= x[n] * h[n]$$

$h[n]$ causal

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

6

Supondremos que $x[n]$ es un proceso de media nula.

Predicción lineal hacia adelante

$$x[n] = \hat{x}[n] + \varepsilon[n]$$

$$\varepsilon[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k]$$



$$(\phi_{xy}[k] = E\{x[n]y^*[n-k]\})$$

$$E\{\varepsilon[n]\} = 0$$

$$E\{|\varepsilon[n]|^2\} = \phi_{xx}[0] + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^p a_p^*[k] \phi_{xx}[k] \right\} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p^*[k] a_p[l] \phi_{xx}[l-k]$$

$$= \phi_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p \left(2a_p[k] \phi_{xx}[k] + a_p[k] \left(\sum_{l=1}^p a_p[l] \phi_{xx}[l-k] \right) \right)$$

$$a_p[k], \phi_{xx}[k] \in \mathbb{R}$$

$$= \phi_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p \left((a_p[k] + a_p[k]) \phi_{xx}[k] + a_p[k] \left(\sum_{l=1}^p a_p[l] \phi_{xx}[l-k] \right) \right)$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

7

Ejercicio: Demostrar que efectivamente la media y la varianza son éstas

Predicción lineal hacia adelante

$$E\{\varepsilon^2[n]\} = \phi_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p \left(a_p[k] \phi_{xx}[k] + a_p[k] \underbrace{\left(\phi_{xx}[k] + \sum_{l=1}^p a_p[l] \phi_{xx}[l-k] \right)} \right)$$

La potencia del error es mínima si este término es 0 para todo k

Ecuaciones normales $\phi_{xx}[k] + \sum_{l=1}^p a_p[l] \phi_{xx}[l-k] = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$


$$E\{\varepsilon^2[n]\} = \phi_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \phi_{xx}[k] - \sum_{k=0}^p a_p[k] \phi_{xx}[k]$$

$a_p[0] = 1$

Ecuaciones Yule-Walker $\sum_{l=0}^p a_p[l] \phi_{xx}[l-k] = \begin{cases} E\{\varepsilon^2[n]\} & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, p \end{cases}$

Predicción lineal hacia delante

Ecuaciones Yule-Walker



$$\begin{pmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[2] & \dots & \phi_{xx}[p] \\ \phi_{xx}[-1] & \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[p-1] \\ \phi_{xx}[-2] & \phi_{xx}[-1] & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[p-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{xx}[-p] & \phi_{xx}[-(p-1)] & \phi_{xx}[-(p-2)] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\{\varepsilon^2[n]\} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\phi_{xx}[-n] = \phi_{xx}[n] \longrightarrow$ La matriz del sistema es Toeplitz

$$E\{\varepsilon^2[n]\} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Gamma_p \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{xx}[0] & \Phi_p' \\ \Phi_p & \Gamma_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Probl Proakis: 11.1*, 11.8*, 11.9*, 11.10, 11.15, 11.16, 11.21

Ejercicio: comprobar que efectivamente ésta es la forma matricial de las ecuaciones de Yule-Walker.

Predicción lineal hacia adelante

Algoritmo de Levinson-Durbin

Idea: Resolver el sistema recursivamente, incrementando el orden del predictor

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] \\ \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a_1^{(1)} = -\frac{\phi_{xx}[1]}{\phi_{xx}[0]} = K_1 \\ \sigma_\varepsilon^{2(1)} = \phi_{xx}[0] + \phi_{xx}[1]a_1^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[2] \\ \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] \\ \phi_{xx}[2] & \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a_2^{(2)} = -\frac{\phi_{xx}[2] + \phi_{xx}[1]a_1^{(1)}}{\phi_{xx}[0] + \phi_{xx}[1]a_1^{(1)}} = K_2 \\ a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + a_1^{(1)}a_2^{(2)} \\ \sigma_\varepsilon^{2(2)} = \phi_{xx}[0] + \phi_{xx}[1]a_1^{(2)} + \phi_{xx}[2]a_2^{(2)} \end{cases}$$

Predicción lineal hacia delante

Algoritmo de Levinson-Durbin

Idea: Resolver el sistema recursivamente, incrementando el orden del predictor

$$\mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{m-1} \\ K_m \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{aligned} \sigma_\varepsilon^{2(m)} &= \sigma_\varepsilon^{2(m-1)} (1 - |K_m|^2) \\ \sigma_\varepsilon^{2(0)} &= \phi_{xx}[0] \end{aligned} \right.$$

donde

$$K_m = -\frac{\phi_{xx}[m] + \Phi_{m-1}' \mathbf{a}_{m-1}}{\phi_{xx}[0] + \Phi_{m-1}' \mathbf{a}_{m-1}} \quad a_1^{(1)} = -\frac{\phi_{xx}[1]}{\phi_{xx}[0]} = K_1 \quad a_2^{(2)} = -\frac{\phi_{xx}[2] + \phi_{xx}[1]a_1^{(1)}}{\phi_{xx}[0] + \phi_{xx}[1]a_1^{(1)}} = K_2$$

$$\mathbf{d}_{m-1} = K_m \mathbf{a}_{m-1}$$

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + a_1^{(1)} a_2^{(2)} = a_1^{(1)} + K_2 a_1^{(1)}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_2 a_1^{(1)} \\ K_2 \end{pmatrix}$$



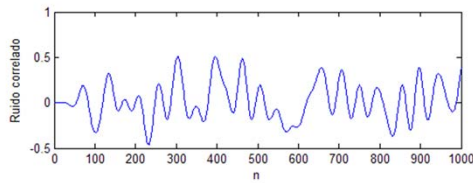
Ejercicio: Escribir a3

Probl. Proakis: 11.11, 11.12, 11.13, 11.28

Contenido

- Predicción lineal hacia delante
 - Ecuaciones de Yule-Walker
 - Algoritmo de Levinson-Durbin
- Innovación de procesos aleatorios
 - Procesos AR, MA, y ARMA
- Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Innovación en procesos aleatorios



- La innovación de una muestra a la siguiente no es infinita.
- Una muestra no es independiente de la anterior.
- Cada muestra está correlada con su entorno.

- Puedo tratar de predecir una muestra a partir de las muestras de su entorno.

Sea un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio $x[n]$ con función de autocorrelación $\phi_{xx}[m]$ y densidad espectral de potencia $S_{xx}(e^{j\omega})$

is wide-sense stationary if and only if mean is constant, and autocorrelation depends only on difference between arguments

Innovación en procesos aleatorios

Cepstro de $x[n]$

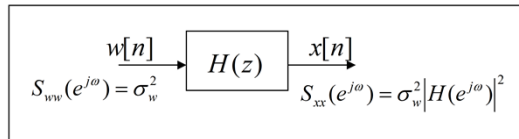
Sea $S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m]z^{-m}$. Supongamos que $\log S_{xx}(z)$ es una función analítica

en $\Omega = \{z \mid r_1 < |z| < r_2\}$. Entonces, se puede expandir en una serie de Laurent que incluye a la circunferencia unidad.

Coefficientes cepstrales

$$\log S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m]z^{-m} \Rightarrow \log S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m]e^{-jm\omega} \longrightarrow v[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log S_{xx}(e^{j\omega}) e^{jm\omega} d\omega$$

$$S_{xx}(z) = \exp\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m]z^{-m}\right) = \exp\left(\sum_{m=-\infty}^{-1} v[m]z^{-m} + v[0] + \sum_{m=1}^{\infty} v[m]z^{-m}\right) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$$



$$\begin{aligned} v[m] &= v[-m] \\ \sigma_w^2 &= \exp(v[0]) \\ H(z) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} v[m]z^{-m}\right) \end{aligned}$$

Curso 2012/2013

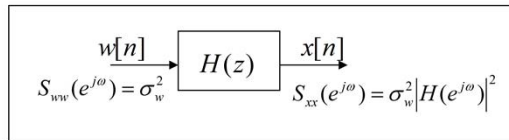
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

14

El objetivo de esta transparencia es demostrar que cualquier señal que tenga una densidad espectral de potencia se puede expresar como la respuesta a ruido blanco por parte de un sistema lineal.

Probl Proakis: 11.18, 11.19

Innovación en procesos aleatorios



$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \longrightarrow \text{Modelo ARMA (Auto Regressive, Moving Average)}$$

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k]$$

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} \longrightarrow \text{Modelo AR (Auto Regressive)}$$

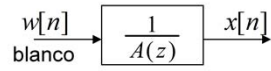
$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = w[n]$$

$$H(z) = B(z) \longrightarrow \text{Modelo MA (Moving average)}$$

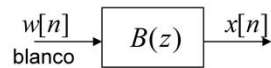
$$x[n] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k]$$

Innovación en procesos aleatorios

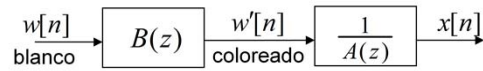
$$H(z) = \frac{1}{A(z)} \longrightarrow \text{Modelo AR (Auto Regressive)}$$



$$H(z) = B(z) \longrightarrow \text{Modelo MA (Moving average)}$$



$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \longrightarrow \text{Modelo ARMA (Auto Regressive, Moving Average)}$$



Innovación en procesos aleatorios

Correlación de un proceso ARMA

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k]$$

$$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]x^*[n-m]\} = E\left\{\left[\sum_{k=0}^q b_k w[n-k] - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k]\right]x^*[n-m]\right\}$$



$$= \sum_{k=0}^q b_k E\{w[n-k]x^*[n-m]\} - \sum_{k=1}^p a_k E\{x[n-k]x^*[n-m]\}$$

$$= \sum_{k=0}^q b_k \phi_{wx}[m-k] - \sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}[m-k] = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_k h[k-m] - \sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}[m-k]$$

$$\phi_{wx}[m] = E\{w[n]x^*[n-m]\} = E\{w[n+m]x^*[n]\} = E\left\{w[n+m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]w^*[n-k]\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] E\{w[n+m]w^*[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \phi_{ww}[m+k] = \sigma_w^2 h[-m]$$

$$\phi_{ww}[m] = \sigma_w^2 \delta[m]$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

17

Ejercicio: comprobar que la $E\{w[n-k]x^*[n-m]\} = \phi_{wx}[m-k]$

Innovación en procesos aleatorios

Correlación de un proceso ARMA

$$\phi_{xx}[m] = \begin{cases} \phi_{xx}^*[-m] & m < 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}[m-k] & m > q \end{cases}$$

Correlación de forma compacta

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

18

Proakis 12.2.2

Innovación en procesos aleatorios

Correlación de un proceso AR

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = w[n] \longrightarrow \phi_{xx}[m] = \sigma_w^2 \delta[m] - \sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}[m-k]$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[2] & \dots & \phi_{xx}[p] \\ \phi_{xx}[-1] & \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[p-1] \\ \phi_{xx}[-2] & \phi_{xx}[-1] & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[p-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{xx}[-p] & \phi_{xx}[-(p-1)] & \phi_{xx}[-(p-2)] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡¡Ecuaciones de Yule-Walker!!

Relación entre procesos AR y predicción lineal hacia delante

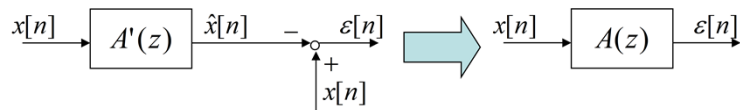
Modelo AR $x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = w[n]$

$w[n]$ blanco \rightarrow $\frac{1}{A(z)}$ \rightarrow $x[n]$ $X(z) = \frac{1}{A(z)} W(z)$

Predicción lineal $\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^p a_p[k] x[n-k]$

$x[n]$ \rightarrow $A'(z)$ \rightarrow $\hat{x}[n]$ $\varepsilon[n] = x[n] - \hat{x}[n] = x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k] x[n-k]$

$E(z) = A(z)X(z)$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

20

Y además epsilon[n] también debe de ser blanco porque si no es blanco significa que hay una cierta correlación que podía haber predicho.

Probl Proakis: 11.2*, 11.3*, 11.29

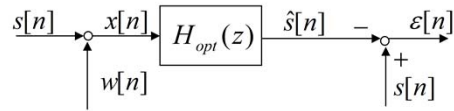
Contenido

- Predicción lineal hacia delante
 - Ecuaciones de Yule-Walker
 - Algoritmo de Levinson-Durbin
- Innovación de procesos aleatorios
 - Procesos AR, MA, y ARMA
- Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

- Usos:

- [Predicción]
- Filtrado
- [Suavizado]



Se supone que $s[n]$ y $w[n]$ son señales estacionarias en sentido amplio y de media 0.

Filtro FIR de Wiener

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \longrightarrow \varepsilon[n] = s[n] - \hat{s}[n] = s[n] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\{\varepsilon^2[n]\} = E\{s^2[n] + \hat{s}^2[n] - 2s[n]\hat{s}[n]\}$$

Applet: <http://www.nt.e-technik.uni-erlangen.de/~rabe/SYSTOOL/SYSTOOL2.02/HTTP/wien.htm>

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

22

is wide-sense stationary if and only if mean is constant, and autocorrelation depends only on difference between arguments

Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Filtro FIR de Wiener

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^2 &= E\{\varepsilon^2[n]\} = E\{s^2[n] + \hat{s}^2[n] - 2s[n]\hat{s}[n]\} \\
 &= \sigma_s^2 + E\left\{\sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} h[k]h[l]x[n-k]x[n-l] - 2s[n]\sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]\right\} \\
 &= \sigma_s^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} h[k]h[l]E\{x[n-k]x[n-l]\} - 2\sum_{k=0}^{M-1} h[k]E\{x[n-k]s[n]\} \\
 &= \sigma_s^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} h[k]h[l]\phi_{xx}[l-k] - 2\sum_{k=0}^{M-1} h[k]\phi_{sx}[k]
 \end{aligned}$$

Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Filtro FIR de Wiener

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^2 &= \sigma_s^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} h[k]h[l]\phi_{xx}[l-k] - 2 \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\phi_{sx}[k] \\
 &= \sigma_s^2 + (h[0] \quad h[1] \quad \dots \quad h[M-1]) \begin{pmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & \dots & \phi_{xx}[M-1] \\ \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] & \dots & \phi_{xx}[M-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{xx}[M-1] & \phi_{xx}[M-2] & \dots & \phi_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \dots \\ h[M-1] \end{pmatrix} \\
 &\quad - 2(\phi_{sx}[0] \quad \phi_{sx}[1] \quad \dots \quad \phi_{sx}[M-1]) \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \dots \\ h[M-1] \end{pmatrix} \\
 &= \sigma_s^2 + \mathbf{h}^T \Gamma_{xx} \mathbf{h} - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx} \mathbf{h}
 \end{aligned}$$

Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Filtro FIR de Wiener

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_s^2 + \mathbf{h}^t \Gamma_{xx} \mathbf{h} - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx}^t \mathbf{h}$$

$$\frac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial \mathbf{h}} = (\Gamma_{xx} + \Gamma_{xx}^t) \mathbf{h} - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx} = 2\Gamma_{xx} \mathbf{h} - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx} = 0 \Rightarrow \Gamma_{xx} \mathbf{h} = \boldsymbol{\varphi}_{sx} \rightarrow \mathbf{h}_{opt} = \Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (A + A^t) \mathbf{x} \quad \frac{\partial \mathbf{a}^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$



$s[n]$ y $w[n]$ incorreladas

$$\begin{aligned} \phi_{sx}[k] &= \phi_{ss}[k] \\ \phi_{xx}[k] &= \phi_{ss}[k] + \phi_{ww}[k] \\ &= \phi_{ss}[k] + \sigma_w^2 \delta[k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 &= \sigma_s^2 + (\Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx})^t \Gamma_{xx} (\Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx}) - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx}^t (\Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx}) = \\ &= \sigma_s^2 + \boldsymbol{\varphi}_{sx}^t (\Gamma_{xx}^{-1})^t \Gamma_{xx} \Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx} - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx}^t \Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx} = \\ &= \sigma_s^2 + \boldsymbol{\varphi}_{sx}^t (\Gamma_{xx}^{-1})^t \boldsymbol{\varphi}_{sx} - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx}^t \Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx} = \\ &= \sigma_s^2 + \boldsymbol{\varphi}_{sx}^t \Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx} - 2\boldsymbol{\varphi}_{sx}^t \Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx} = \sigma_s^2 - \boldsymbol{\varphi}_{sx}^t \Gamma_{xx}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{sx} = \sigma_s^2 - \boldsymbol{\varphi}_{sx}^t \mathbf{h}_{opt} \\ &= \sigma_s^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{opt}[k] \phi_{sx}[n-k] \end{aligned}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

25

Ejercicio: Hacer las demostraciones que están en el recuadro

Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

¿Qué representan las derivadas vectoriales?

$$\frac{\partial \sigma_{\varepsilon}^2}{\partial \mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{\varepsilon}^2}{\partial h[0]} \\ \frac{\partial \sigma_{\varepsilon}^2}{\partial h[1]} \\ \dots \\ \frac{\partial \sigma_{\varepsilon}^2}{\partial h[M-1]} \end{pmatrix}$$

Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Filtro FIR de Wiener y el principio de ortogonalidad

$$E\{\varepsilon[n]x[n-l]\} = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

↑
No hay ninguna correlación entre el error a la salida y la entrada. Si lo hubiese, vendría de $s[n]$

$$E\{\varepsilon[n]x[n-l]\} = E\left\{ \left(s[n] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \right) x[n-l] \right\}$$

$$= E\{s[n]x[n-l]\} - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]E\{x[n-k]x[n-l]\}$$

$$= \phi_{sx}[l] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\phi_{xx}[l-k] = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, M-1) \longrightarrow \boldsymbol{\phi}_{sx} - \boldsymbol{\Gamma}_{xx} \mathbf{h}_{opt} = 0$$

$$\mathbf{h}_{opt} = \boldsymbol{\Gamma}_{xx}^{-1} \boldsymbol{\phi}_{sx}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

27

Esto es otra forma de llegar al mismo resultado. Imponiendo ortogonalidad

Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Filtro de Wiener no causal

$$\begin{aligned}
 \hat{s}[n] &= \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] & \hat{s}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\
 \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\phi_{xx}[l-k] &= \phi_{sx}[l] & \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{xx}[l-k] &= \phi_{sx}[l] \\
 (l=0,1,\dots,M-1) & & (l=-\infty,\dots,\infty) & \\
 \sigma_{\varepsilon}^2 &= \sigma_s^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{opt}[k]\phi_{sx}[n-k] & \sigma_{\varepsilon}^2 &= \sigma_s^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{opt}[k]\phi_{sx}[n-k] \\
 & & H_{opt}(e^{j\omega})S_{xx}(e^{j\omega}) &= S_{sx}(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_{sx}[k] &= \phi_{ss}[k] \\
 \phi_{xx}[k] &= \phi_{ss}[k] + \sigma_w^2 \delta[k]
 \end{aligned} \right\} H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{S_{sx}(e^{j\omega})}{S_{xx}(e^{j\omega})} = \frac{S_{ss}(e^{j\omega})}{S_{ss}(e^{j\omega}) + \sigma_w^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_w^2}{S_{ss}(e^{j\omega})}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{SNR(e^{j\omega})}}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

28

Probl Proakis: 11.27

Resumen

- Predicción lineal hacia delante
 - Ecuaciones de Yule-Walker
 - Algoritmo de Levinson-Durbin
- Innovación de procesos aleatorios
 - Procesos AR, MA, y ARMA
- Filtros lineales óptimos: filtros de Wiener

Tema 7 – Transformada Discreta de Fourier

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Proakis (Cap. 5, Cap. 6)

Oppenheim (Cap. 8, Cap. 9)

Contenido

- Serie de Fourier discreta (DFS)
- Transformada de Fourier de señales periódicas
- Transformada de Fourier discreta (DFT)
- Convolución lineal
- Cálculo de la DFT:
 - Algoritmo directo
 - Algoritmos FFT

A hombros de gigantes

El problema de expansión en serie de funciones trigonométricas

Leonhard Euler (1707, 1783)

- Matemático suizo, 1707-1783
- El matemático más grande del S. XVIII
- Compañero de Daniel Bernoulli
- Propuso la serie de Fourier para resolver un problema de movimiento de los planetas



Jean D'Alambert (1717, 1783)

- Matemático francés, 1717-1783



Joseph-Louis Lagrange (1736, 1813)

- Matemático francés, 1736-1813



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

3

“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

Serie de Fourier discreta (DFS)

Sea $\tilde{x}[n]$ una señal periódica con periodo N . Su representación en serie de Fourier es

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] \phi_{-k}[n] \longleftrightarrow \tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi_k[n]$$

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = W_N^{-kn}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\tilde{X}[k] = Na_k = \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

Existe una dualidad importante en el hecho de que $\tilde{x}[n]$ es una señal discreta, periódica de periodo N y que $\tilde{X}[k]$ también lo es.

Serie de Fourier discreta

Ejemplo: Dualidad

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1$$

$$\tilde{y}[n] = 1 \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot W_N^{kn} = \begin{cases} N & k = rN \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} N \delta[k - rN]$$

Propiedades

$$A\tilde{x}[n] + B\tilde{y}[n] \longleftrightarrow A\tilde{X}[k] + B\tilde{Y}[k]$$

$$\tilde{x}[n - n_0] \longleftrightarrow \tilde{X}[k] W_N^{kn_0}$$

$$\tilde{x}[n] W_N^{-k_0 n} \longleftrightarrow \tilde{X}[k - k_0]$$

$$\tilde{x}^*[n] \longleftrightarrow \tilde{X}^*[-k]$$

$$\tilde{x}[-n] \longleftrightarrow \tilde{X}[-k]$$

...

$$\begin{aligned} \tilde{X}[n] &\longleftrightarrow N\tilde{x}[-k] \\ \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] &\longleftrightarrow \tilde{X}[k] \tilde{Y}[k] \\ \tilde{x}[n] \tilde{y}[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{N} \tilde{X}[k] \otimes \tilde{Y}[k] \end{aligned}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

5

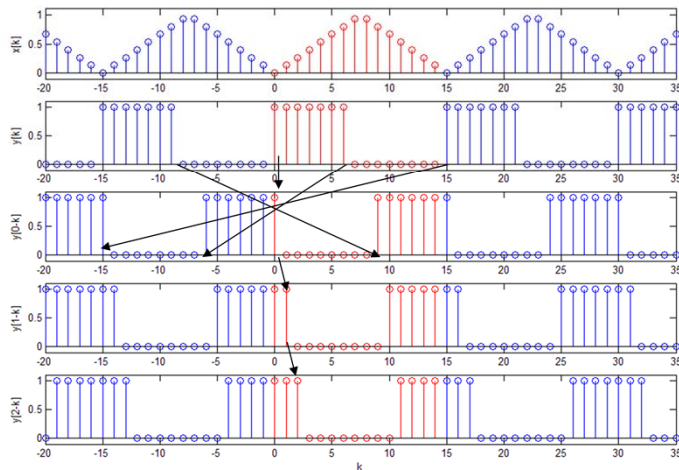
Ejercicio: demostrar estas tres propiedades

Probl Opp: 8.3, 8.21, 8.53

Probl Proakis: 5.31

Serie de Fourier discreta

Ejemplo: $\tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n]$



$$\tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} x[k]y[n-k]$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

6

Probl Opp: 8.22, 8.28

A hombros de gigantes

Series trigonométricas para funciones no periódicas

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1807)

- Matemático francés, 1768-1830
- Profesor de la escuela militar por recomendación de Adrien-Marie Legendre
- Amigo de Napoleón Bonaparte
- Barón, prefecto de Isère
- Estudio de la transmisión de calor entre dos regiones (para el diseño de cañones)



• Su principal contribución fue reconocer que las series trigonométricas servían también a funciones no periódicas. Cuando presentó en 1807 este trabajo en la Academia de Ciencias Francesa, rechazaron el trabajo (Laplace, Lagrange, Monge, Lacroix). En 1811 volvió a submitir el trabajo modificado, se aceptó pero se criticó su falta de rigor.

- El rigor vino de la mano de Siméon Poisson (1823), Lejeune Dirichlet (1828) y Bernhard Riemann (alumno de Dirichlet).
- Después de la integral de Henri Lebesgue (1902) volvió a haber una importante revisión de la teoría por Riesz-Fischer (1907) y Plancherel (1910, generalización de la fórmula de Parseval).

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

7

“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

Transformada de Fourier de señales periódicas

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \begin{cases} \longrightarrow \text{Convergencia uniforme sii } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \\ \longrightarrow \text{Convergencia "mean-square" sii } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \end{cases}$$

Pero las señales periódicas no cumplen ninguna de estas dos condiciones. La herramienta adecuada para su estudio es la serie de Fourier discreta. ¿Cómo se pueden integrar las series de Fourier dentro de la transformada de Fourier?

Sol: Uso de distribuciones (impulsos)

$$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k] \longleftrightarrow \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

Ejemplo:

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] \longleftrightarrow \tilde{P}[k] = 1 \longleftrightarrow \tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

Relación entre la TF de señales periódicas y señales no periódicas

Sea $x[n]$ una señal no periódica tal que $x[n]=0$ salvo en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$

Sean $\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN]$ y $\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\tilde{P}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

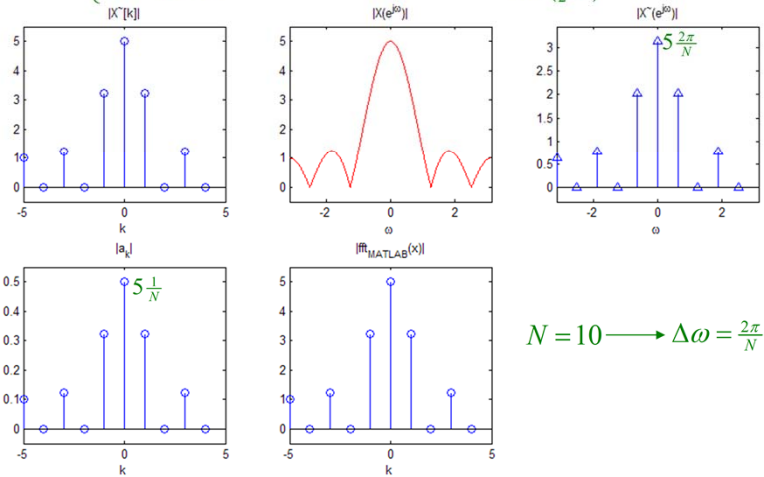
$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \longrightarrow \tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}}$$

En otras palabras, la serie de Fourier de una señal obtenida a partir de la periodización de otra, corresponde al muestreo en el dominio de Fourier de la transformada de Fourier de la señal no periódica con intervalo de muestreo

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$$

Relación entre la TF de señales periódicas y señales no periódicas

Ejemplo: $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$



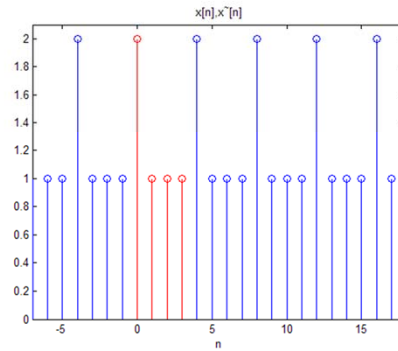
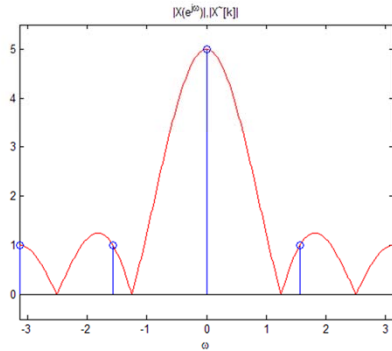
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

10

Undersampling en Fourier (aliasing en el tiempo)

Ejemplo: $X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$ $\xrightarrow[\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}]{N=4}$ $\tilde{X}[k] \longrightarrow \tilde{x}[n] \longrightarrow x[n]$



El aliasing en el tiempo se evita tomando tantas muestras en Fourier como muestras tiene el soporte temporal de $x[n]$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

11

Probl Proakis: 5.28, 5.29

Transformada de Fourier discreta (DFT)

No se trata de la Transformada de Fourier de señales discretas, sino de la Transformada de Fourier Discreta de señales discretas.

Sea $x[n]$ una señal no periódica tal que $x[n] = 0$ salvo en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$

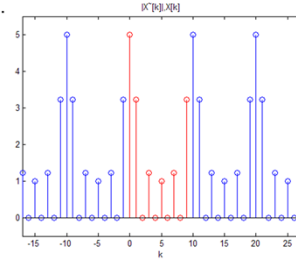
$$x[n] \longrightarrow \tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] = x[n \bmod N] = x[(n)_N] \longrightarrow x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

DFS

$$\tilde{X}[k] \longrightarrow X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]$$

Para que esta igualdad sea cierta, se necesita que el soporte de $x[n]$ esté, efectivamente, acotado por N .



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

12

Probl Opp: 8.5, 8.6*, 8.7*, 8.8, 8.9*, 8.23, 8.30, 8.31, 8.47, 8.48, 8.49, 8.50, 8.51, 8.61, 8.65

Probl Proakis: 5.6, 5.11, 5.13, 5.17, 5.21*, 5.22, 5.23, 5.30, 5.32, 6.5, 6.17

Transformada de Fourier discreta (DFT)

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

$$X[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] W_N^{kn} \xleftrightarrow{\text{DFT}} x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] W_N^{-kn}$$

Propiedades

$$Ax[n] + By[n] \longleftrightarrow AX[k] + BY[k]$$

$$x[\langle (n - n_0) \rangle_N] \longleftrightarrow X[k] W_N^{kn_0}$$

$$x[n] W_N^{-kn_0} \longleftrightarrow X[\langle (k - k_0) \rangle_N]$$

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*[\langle (-k) \rangle_N]$$

$$x^*[\langle (-n) \rangle_N] \longleftrightarrow X^*[-k]$$

...

$$X[n] \longleftrightarrow Nx[\langle (-k) \rangle_N]$$

$$x[n] \otimes y[n] \longleftrightarrow X[k] Y[k]$$

$$x[n] y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{N} X[k] \otimes Y[k]$$



$X[k]$ sigue siendo periódica con periodo N pero lo que estamos diciendo es que sólo nos importan las muestras en un periodo. Pero es imposible deshacerse de la periodicidad.

Probl Opp: 8.10, 8.13, 8.16*, 8.18, 8.19, 8.20, 8.24, 8.25, 8.26, 8.32, 8.33, 8.34, 8.37, 8.38, 8.42, 8.44, 8.45, 8.46, 8.52, 8.55, 8.56, 8.57, 8.58, 9.26, 9.47

Probl Proakis: 5.1*, 5.7, 5.10, 5.12, 5.14, 5.15, 5.16, 5.18, 5.19, 5.20, 5.25, 5.26, 5.27, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21

Transformada de Fourier discreta (DFT)

La DFT como una transformación lineal (cambio de base)

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \dots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^{2-1} & W_N^{2-2} & \dots & W_N^{2-(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)-1} & W_N^{(N-1)-2} & \dots & W_N^{(N-1)-(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \dots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$



$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

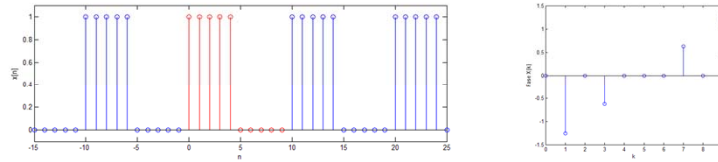
14

Probl Proakis: 5.24, 6.1, 6.2

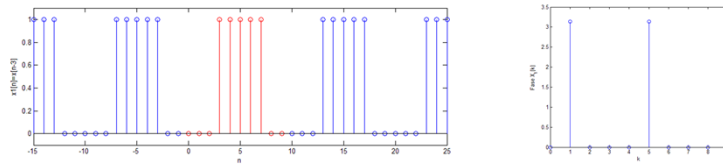
Transformada de Fourier discreta (DFT)

Análisis de algunas propiedades: Desplazamiento en el tiempo

$$x[n] \longrightarrow \tilde{x}[n] = x[((n))_N] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k] \longrightarrow X[k]$$



$$x_1[n] = x[((n - n_0))_N] \longrightarrow \tilde{x}_1[n] = x[((n - n_0))_N] = \tilde{x}[n - n_0] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k] W_N^{kn_0} \longrightarrow X[k] W_N^{kn_0}$$



Curso 2012/2013

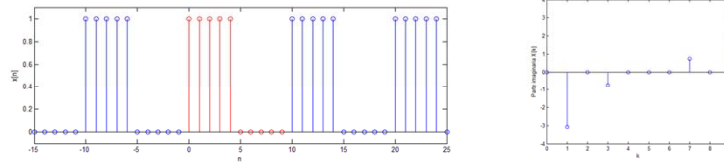
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

15

Transformada de Fourier discreta (DFT)

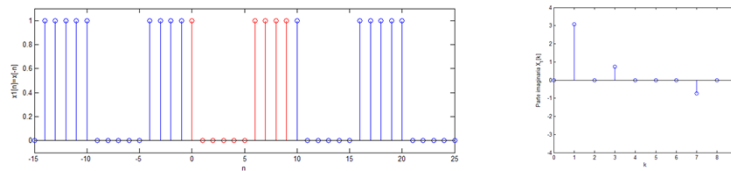
Análisis de algunas propiedades: Simetría

$$x[n] \longrightarrow \tilde{x}[n] = x[((n))_N] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k] \longrightarrow X[k]$$



$$x_1[n] = x[(-n)_N] \longrightarrow \tilde{x}_1[n] = x[(-n)_N] = \tilde{x}[-n] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[-k] = \tilde{X}^*[k] \longrightarrow X^*[k]$$

$$\begin{aligned} ((-1))_3 &= 2 \\ ((0))_3 &= 0 \\ ((1))_3 &= 1 \\ ((2))_3 &= 2 \\ ((3))_3 &= 0 \\ ((4))_3 &= 1 \end{aligned}$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

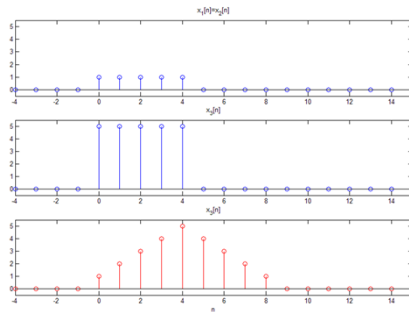
16

Diferencias entre convolución lineal y convolución periódica

$$X_1[k]X_2[k] \xrightarrow{\text{DFT}} x_1[n] \otimes x_2[n] \neq x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\text{FT}} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

Ejemplo: $x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xrightarrow[N=L]{\text{DFT}} X_1[k] = X_2[k] = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{kn} = N\delta[k]$

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = N^2\delta[k] \xrightarrow{\text{DFT}} x_3[n] = \begin{cases} N & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$\neq x_3[n] = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 2L-(n+1) & L \leq n \leq 2L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

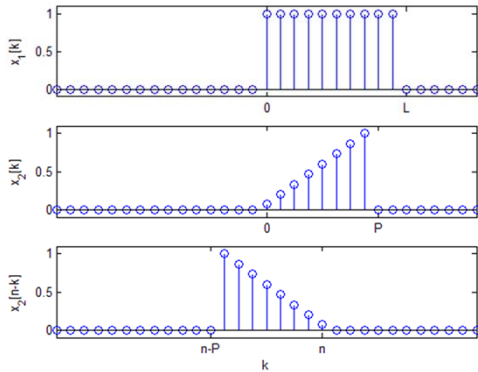
¿Cuál es el problema?

Probl Opp: 8.11, 8.12*, 8.14, 8.15, 8.27, 8.29, 8.35, 8.36

Probl Proakis: 5.2, 5.4, 5.5, 5.8, 5.9

Implementación de la convolución lineal usando la DFT

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$



Pero el producto es nulo fuera del intervalo

$$0 \leq n \leq L + P - 2$$

Si quiero evitar el aliasing temporal en $x_3[n]$, debo tomar al menos $N = L + P - 1$ muestras en Fourier.



De hecho, se puede demostrar que

$$x_{3N}[n] = x_{1N}[n] \otimes x_{2N}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rN] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde N es el número de muestras de la DFT.

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

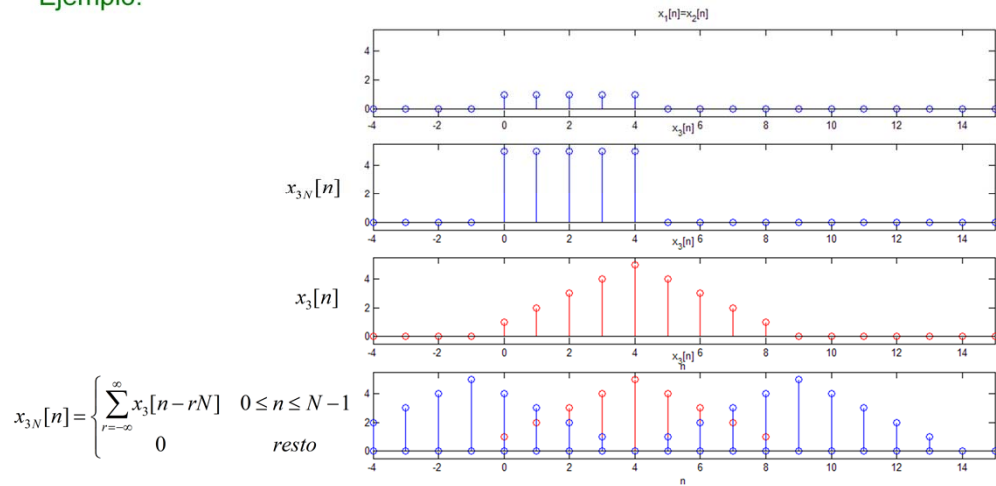
18

La última muestra de la salida se produce para $n-(P-1)=L-1$ o lo que es lo mismo $n=L+P-2$. Ejercicio: realizar esta demostración.

Probl Opp: 8.17

Implementación de la convolución lineal usando la DFT

Ejemplo:



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

19

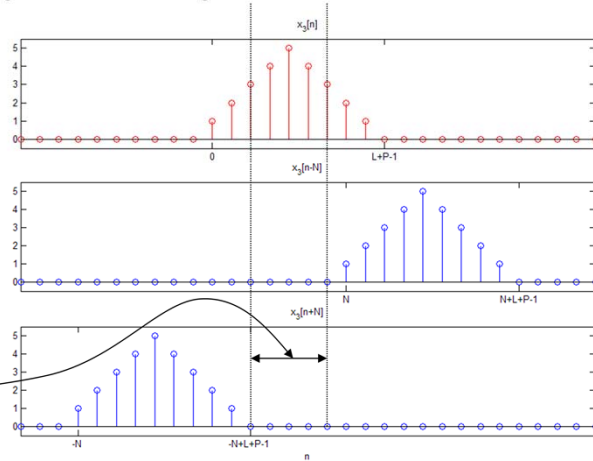
Implementación de la convolución lineal usando la DFT

Si hay aliasing en el tiempo, ¿no me sirve ninguna muestra?

$$x_{3N}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rN] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La convolución periódica es idéntica a la convolución lineal en el intervalo

$$-N + L + P + 1 \leq n \leq N - 1$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

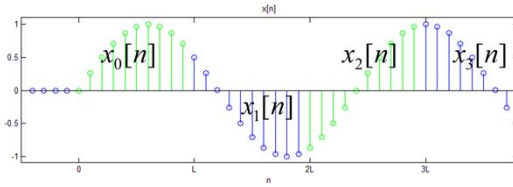
20

Implementación de la convolución lineal usando la DFT

Convolución por bloques (overlap-add)

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n-rL]$$

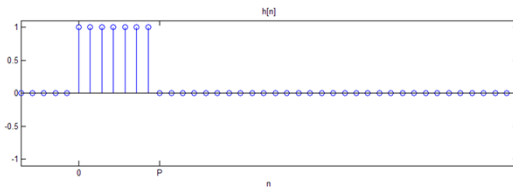
$$x_r[n] = \begin{cases} x[n+rL] & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n-rL] * h[n]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n-rL]$$



Cada $y_r[n]$ tiene un soporte de $L+P-1$ muestras.

Implementación de la convolución lineal usando la DFT

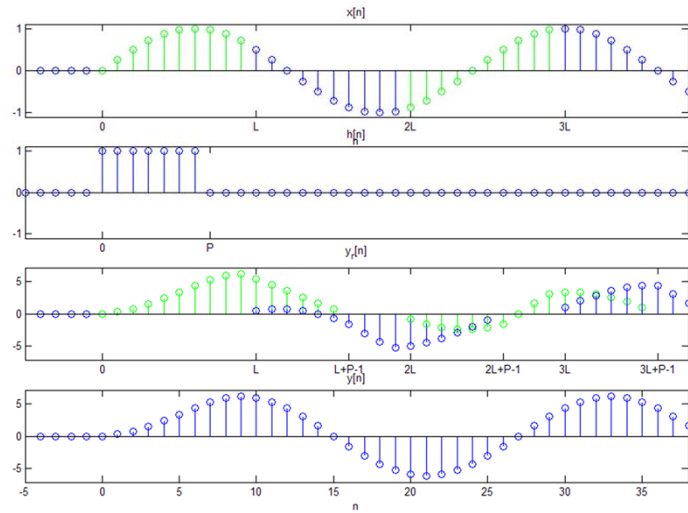
Ejemplo:

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{12}n\right)u[n]$$

$$h[n] = u[n] - u[n - P]$$

$$P = 7$$

$$L = 10$$



Curso 2012/2013

Carlos Oscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

22

Implementación de la convolución lineal usando la DFT

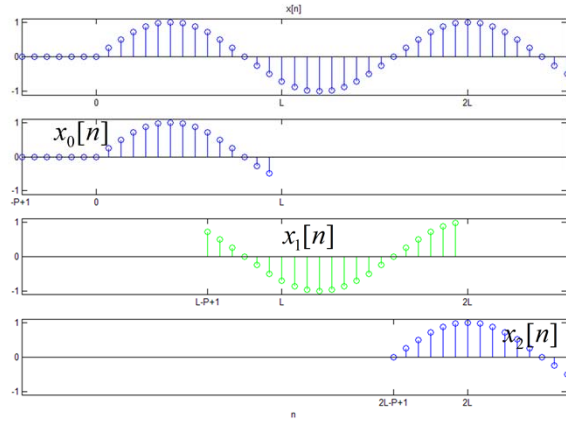
Convolución por bloques (overlap-save)

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n+rL-P+1] & 0 \leq n \leq L+P-2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n-r(L-P+1)+P-1]$$

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]$$

$$y_r[n] = \begin{cases} y_r[n] & P-1 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Cada $y_r[n]$ tiene un soporte de $L-P+1$ muestras.

Implementación de la convolución lineal usando la DFT

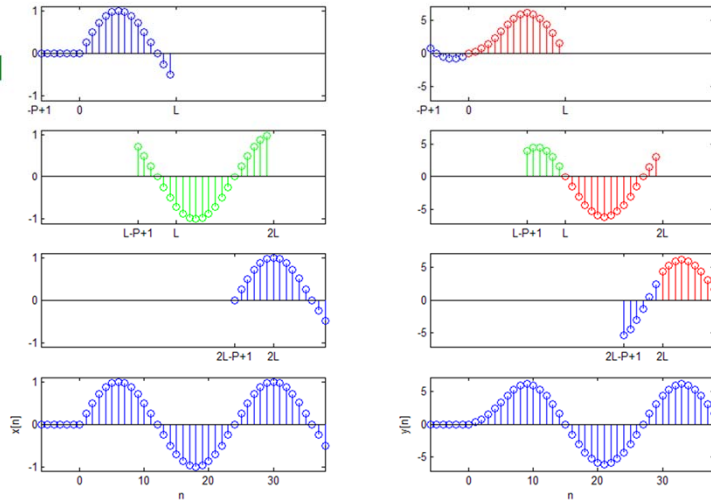
Ejemplo:

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{12}n\right)u[n]$$

$$h[n] = u[n] - u[n - P]$$

$$P = 7$$

$$L = 15$$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

24

Probl Opp: 8.39, 8.40, 8.41, 8.43, 8.59, 8.60, 8.62, 8.63, 8.64, 8.66, 8.67

Cálculo directo de la DFT

$$\left. \begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] W_N^{kn} = X_R[k] + jX_I[k] \\ x[n] &= x_R[n] + jx_I[n] \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} X_R[k] &= \sum_{n=\langle N \rangle} x_R[n] \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I[n] \sin \frac{2\pi kn}{N} \\ X_I[k] &= \sum_{n=\langle N \rangle} x_R[n] \sin \frac{2\pi kn}{N} - x_I[n] \cos \frac{2\pi kn}{N} \end{aligned} \right.$$

Cada muestra $X[k]$ necesita:

- $4N$ multiplicaciones reales (N multiplicaciones complejas)
- $4N-2$ sumas reales ($N-1$ sumas complejas)
- $2N$ cálculos de funciones trigonométricas

El conjunto de la DFT tiene N muestras, por tanto:

- $4N^2$ multiplicaciones reales (N^2 multiplicaciones complejas)
- $4N(N-2)$ sumas reales ($N(N-1)$ sumas complejas)
- $2N^2$ cálculos de funciones trigonométricas (precalculadas en una tabla)



¿Existe un cálculo más eficiente de la DFT?

Sol: Una familia de algoritmos denominados **FFT** (Fast Fourier Transform)

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

25

$4N-2$ sumas reales porque para cada muestra de X_r necesito $2N-1$ sumas reales.
Ej: $N=2$ ($x_r[0] \dots + x_i[0] \dots + x_r[1] \dots + x_i[1]$) = $2 \cdot 2 - 1$

Probl Opp: 9.1*

A hombros de gigantes

Algoritmos de FFT

John W. Tukey (1965)

- Matemático estadounidense, 1915-2000
- Trabajó con John Von Neumann
- Inventor de las palabras "bit" y "software"
- Importantes contribuciones en estadística



James W. Cooley (1965)

- Matemático estadounidense, 1926-
- Trabajó con John Von Neumann
- IBM Watson Research



"If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants." Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

Algoritmo FFT “Divide y vencerás”

Supongamos que $N = LM$

$x[0]$	$x[1]$...	$x[N-1]$
--------	--------	-----	----------



	M			
	$x[0]$	$x[L]$...	$x[(M-1)L]$
	$x[1]$	$x[L+1]$...	$x[(M-1)L+1]$
	$x[2]$	$x[L+2]$...	$x[(M-1)L+2]$

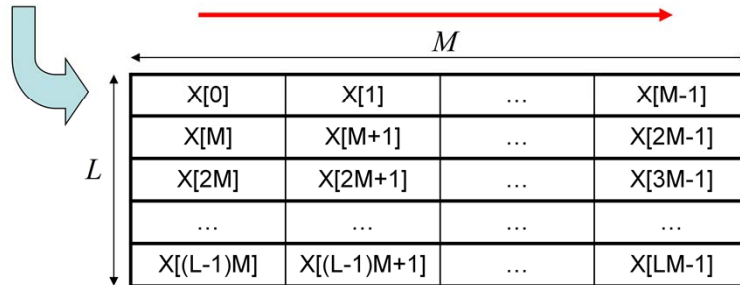
L	$x[L-1]$	$x[2L-1]$...	$x[ML-1]$

$$x[l, m] = x[l + mL] \quad 0 \leq l \leq L-1 \\ 0 \leq m \leq M-1$$

Algoritmo FFT “Divide y vencerás”

Supongamos que $N = LM$

$X[0]$	$X[1]$...	$X[N-1]$
--------	--------	-----	----------



$$X[p, q] = X[Mp + q] \quad \begin{array}{l} 0 \leq p \leq L-1 \\ 0 \leq q \leq M-1 \end{array}$$

Algoritmo FFT “Divide y vencerás”

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} = X[p, q] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(Mp+q)n} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} x[l, m]W_N^{(Mp+q)(l+mL)}$$

$$X[p, q] = X[Mp+q] \quad x[l, m] = x[l+mL]$$

Pero $W_N^{(Mp+q)(l+mL)} = W_N^{MLmp}W_N^{mLq}W_N^{Mpl}W_N^{lq} = 1 \cdot W_N^{\frac{N}{L}mq}W_N^{\frac{N}{M}lp}W_N^{lq} = W_M^{mq}W_L^{lp}W_N^{lq}$

$$X[k] = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} x[l, m]W_N^{(Mp+q)(l+mL)} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} x[l, m]W_M^{mq}W_L^{lp}W_N^{lq}$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} \left(W_N^{lq} \left(\sum_{m=0}^{M-1} x[l, m]W_M^{mq} \right) \right) W_L^{lp}$$

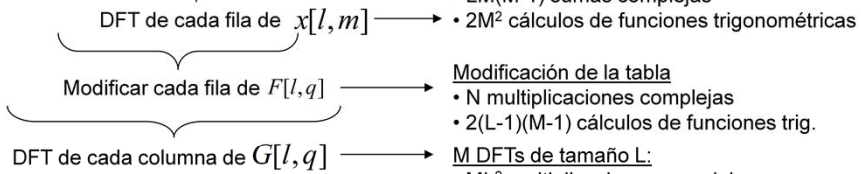
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{DFT de cada fila de } x[l, m]} \longrightarrow F[l, q] = \sum_{m=0}^{M-1} x[l, m]W_M^{mq}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Modificar cada fila de } F[l, q]} \longrightarrow G[l, q] = W_N^{lq} F[l, q]$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{DFT de cada columna de } G[l, q]} \longrightarrow X[p, q] = \sum_{l=0}^{L-1} G[l, q]W_L^{lp}$

Algoritmo FFT “Divide y vencerás”

$$X[k] = \sum_{l=0}^{L-1} \left(W_N^{lq} \left(\sum_{m=0}^{M-1} x[l, m] W_M^{mq} \right) \right) W_L^{lp}$$



- L DFTs de tamaño M:
- LM^2 multiplicaciones complejas
 - $LM(M-1)$ sumas complejas
 - $2M^2$ cálculos de funciones trigonométricas

- Modificación de la tabla
- N multiplicaciones complejas
 - $2(L-1)(M-1)$ cálculos de funciones trig.

- M DFTs de tamaño L:
- ML^2 multiplicaciones complejas
 - $ML(L-1)$ sumas complejas
 - $2L^2$ cálculos de funciones trigonométricas

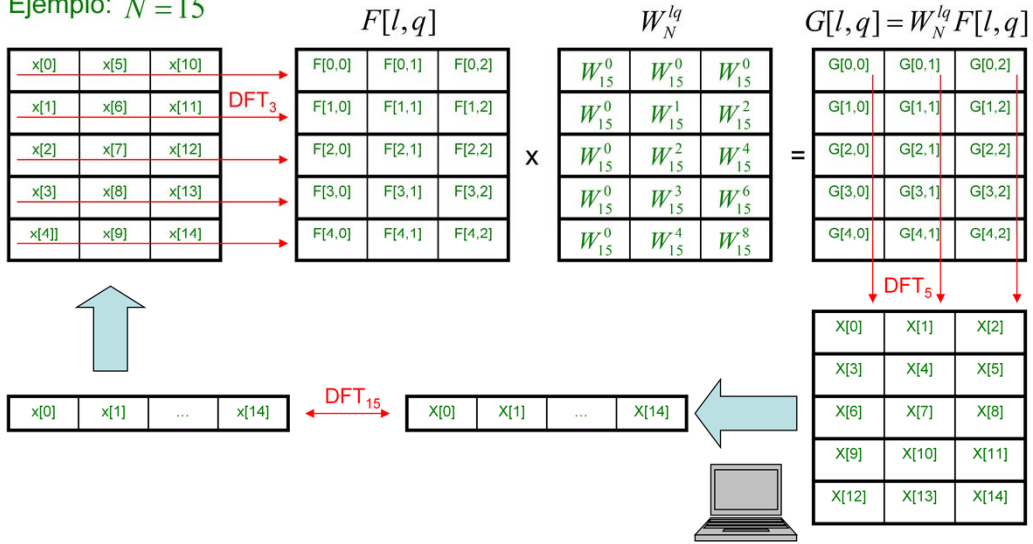
Ejemplo: $N = 1000 = 500 \cdot 2 = 250 \cdot 4$

	Directo	Divide y vencerás	Divide y vencerás
Multiplicaciones	1,000.000	503.000	255.000
Sumas	999.000	500.000	252.000
Funciones	2,000.000	501.006	126.526

- Total:
- $N(M+L+1)$ multiplicaciones complejas
 - $N(M+L-2)$ sumas complejas
 - $2(M^2+L^2+(M-1)(L-1))$ cálculos de funciones trig.

Algoritmo FFT “Divide y vencerás”

Ejemplo: $N = 15$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

31

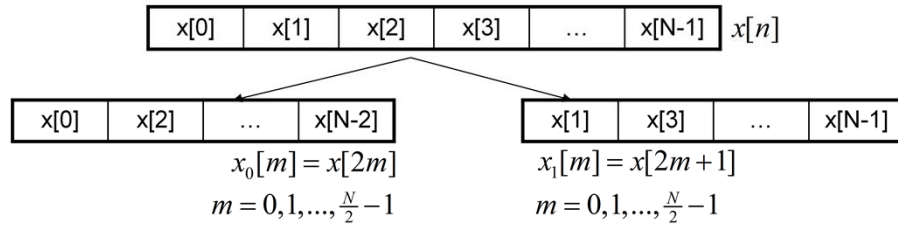
Ejercicio: realizar DFTs de 15 elementos
 Probl Opp: 9.29, 9.30, 9.37
 Probl Proakis: 6.3*, 6.4*

Algoritmo FFT de base 2 (diezmado en el tiempo)

Un caso especialmente eficiente es cuando $N = r^v$

Estudiaremos $r = 2$

↑ Base del algoritmo



$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} = \sum_{n \text{ par}} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n \text{ impar}} x[n]W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]W_N^{k2m} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]W_N^{k(2m+1)} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0[m]W_{\frac{N}{2}}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1[m]W_{\frac{N}{2}}^{km} = X_0[k] + W_N^k X_1[k]
 \end{aligned}$$

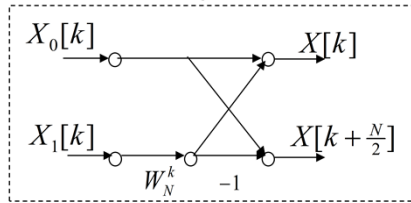
→ DFT de N/2 puntos

Algoritmo FFT de base 2 (diezmado en el tiempo)

$$X[k] = X_0[k] + W_N^k X_1[k]$$

Pero, además, $X_0[k] = X_0[k + \frac{N}{2}]$
 $X_1[k] = X_1[k + \frac{N}{2}]$
 $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ } $\rightarrow X[k + \frac{N}{2}] = X_0[k + \frac{N}{2}] + W_N^{k+\frac{N}{2}} X_1[k + \frac{N}{2}]$
 $= X_0[k] - W_N^k X_1[k]$

“Mariposa”

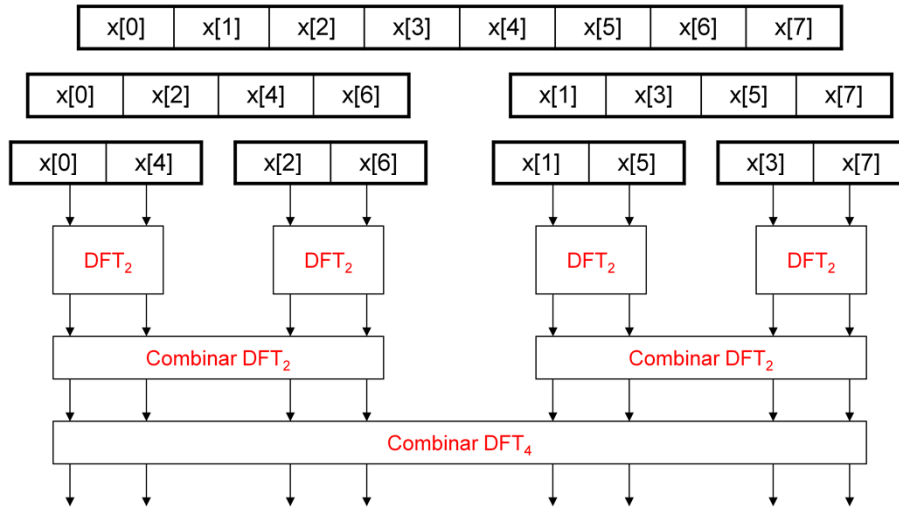


Complejidad de una mariposa

- 1 multiplicación compleja
- 2 sumas

Algoritmo FFT de base 2 (diezmado en el tiempo)

Puedo repetir el proceso tantas veces hasta llegar a 2 muestras únicamente

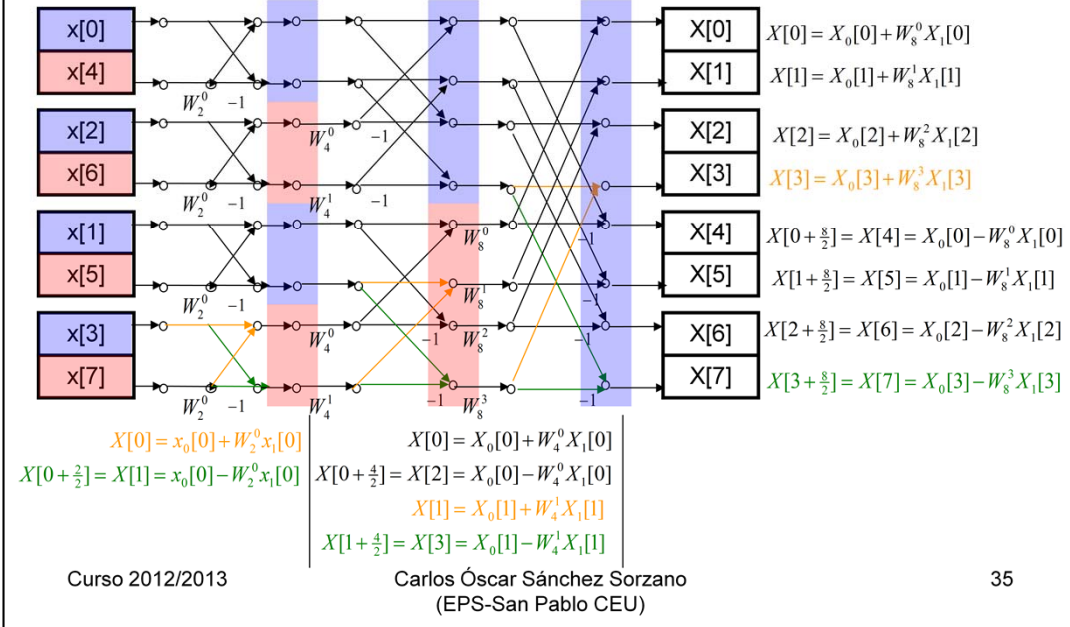


Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

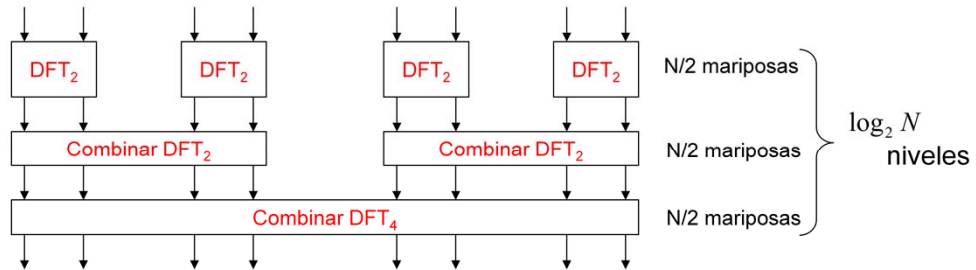
34

Algoritmo FFT de base 2 (diezmado en el tiempo)



Algoritmo FFT de base 2 (diezmado en el tiempo)

Complejidad



Complejidad global: $\frac{N}{2} \log_2 N$ mariposas \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{N}{2} \log_2 N \text{ multiplicaciones complejas} \\ \bullet N \log_2 N \text{ sumas complejas} \end{array} \right.$

Algoritmo FFT de base 2 (diezmado en el tiempo)

Complejidad

Número de puntos (N)	Multiplicaciones complejas en el cálculo directo	Multiplicaciones complejas en FFT	Factor de mejora
4	16	4	4.0
8	64	12	5.3
16	256	32	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.3
128	16384	448	36.6
256	65536	1024	64.0
512	262144	2304	113.8
1024	1048576	5120	204.8

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

37

Probl Opp: 9.2*, 9.3, 9.4, 9.14, 9.15*, 9.16, 9.18, 9.22, 9.23, 9.24, 9.45, 9.46, 9.50, 9.51

Probl Proakis: 6.7, 6.9, 6.11, 6.12, 6.13*, 6.23, 6.28, 6.36

Otros algoritmos FFT

- FFT base 2 (diezmado en frecuencia)
- FFT base 4
- FFT base partida (Split Radix FFT)
- Algoritmo de Goertzel
- Winograd Fourier Transform
- Transformada z chirp

Resumen

- Serie de Fourier discreta (DFS)
- Transformada de Fourier de señales periódicas
- Transformada de Fourier discreta (DFT)
- Convolución lineal
- Cálculo de la DFT:
 - Algoritmo directo
 - Algoritmos FFT

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

39

Probl Opp: 9.5, 9.7*, 9.21, 9.27, 9.28, 9.31, 9.32, 9.33, 9.35, 9.48

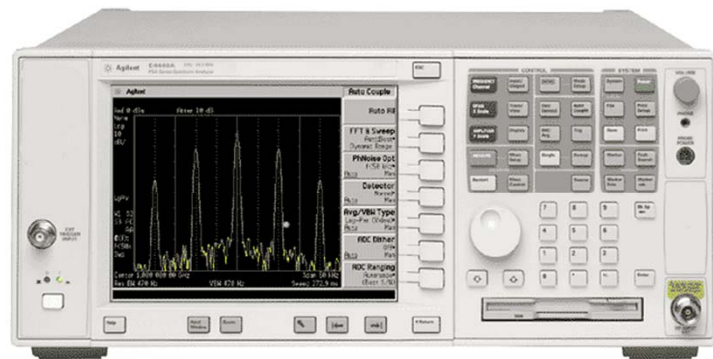
Probl Proakis: 6.16, 6.22, 6.24, 6.33, 6.35, 6.37

Tema 8 – Estimación espectral de potencia

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Proakis (Cap. 14), Oppenheim (Cap. 10)

Analizadores de espectro



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

2

Agilent PSA Series High-Performance Spectrum Analyzer

Analizadores de espectro

Frequency span (*FFT and swept mode*)

Range	0 Hz (zero span), 10 Hz to maximum frequency of model
Resolution	2 Hz
Accuracy	$\pm[0.2\% \times \text{span} + \text{span} / (\text{sweep points} - 1)]$

Resolution bandwidth (RBW)

Range (-3.01 dB bandwidth)	1 Hz to 3 MHz (10% steps), 4, 5, 6, 8 MHz	
Bandwidth accuracy (power) RBW range	1 Hz to 51 kHz	$\pm 0.5\%$ (± 0.022 dB)
	56 kHz to 75 kHz	$\pm 1.0\%$ (± 0.044 dB)
	82 kHz to 330 kHz	$\pm 0.5\%$ (± 0.022 dB)
	360 kHz to 1.1 MHz (< 3 GHz CF)	$\pm 1.0\%$ (± 0.044 dB)
	1.2 MHz to 2.0 MHz (< 3 GHz CF)	± 0.07 dB nominal
	2.2 MHz to 6.0 MHz (< 3 GHz CF)	± 0.2 dB nominal
Bandwidth accuracy (-3.01 dB) RBW range	1 Hz to 1.5 MHz	$\pm 2\%$ nominal
Selectivity (-60 dB/-3 dB)	4.1:1 nominal	
EMI bandwidths (CISPR compliant)	200 Hz, 9 kHz, 120 kHz, 1 MHz	
EMI bandwidths (MIL STD 461E compliant)	10 Hz, 100 Hz, 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz, 1 MHz	

Curso 2012/2013






Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

3

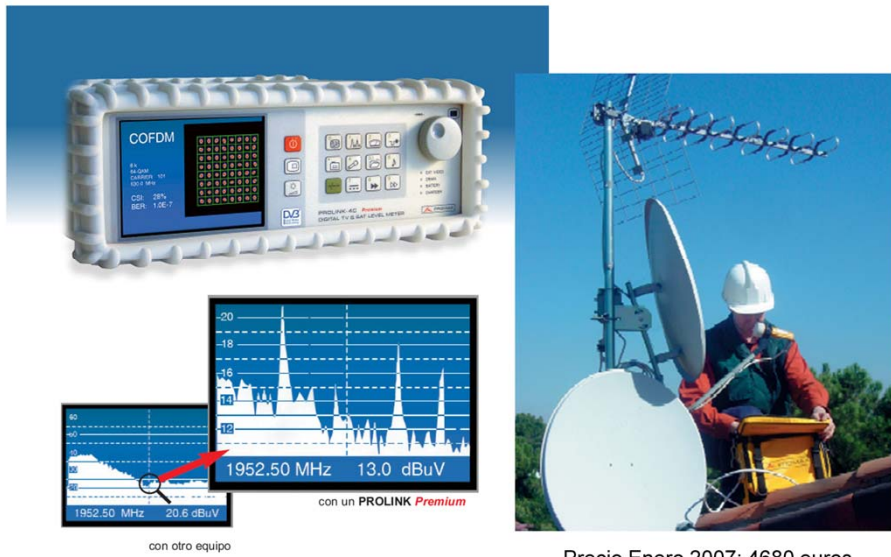
<http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5980-1284E.pdf>

Analizadores de espectro

Spectrum Analyzers on Sale

Image	Description	Pricing*
	HP/Agilent E4440A-1D5-219-226-B7J-H70 (Demo) 3Hz - 26.5GHz Spectrum Analyzer PSA Series	List price \$75,464 Sale price \$66,400 (12% savings)
	HP/Agilent E4440A-1D5-AYZ-B7J-H70 (Demo) 3Hz - 26.5GHz Spectrum Analyzer PSA Series	List price \$66,567 Sale price \$54,917 (18% savings)
	HP/Agilent 8563E (Refurbished) 9kHz - 26.5GHz Spectrum Analyzer	List price \$99,050 Sale price \$21,795 (45% savings)
	HP/Agilent 8593E-010-041 (Refurbished) 9kHz - 22GHz Spectrum Analyzer	List price \$99,304 Sale price \$18,285 (54% savings)
	Rohde and Schwarz FSH-Z1 (Refurbished) Power Sensor for FSHx	List price \$2,660 Sale price \$1,499 (44% savings)

Medidores de campo



Precio Enero 2007: 4680 euros

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

5

<http://www.promax.es/esp/productos/fichaprod.asp?product=101>

A hombros de gigantes

Tiempo Frecuencia

Reginald Hooker(1901)

- Estadístico inglés, 1867-1944
- Hijo de un amigo de Darwin
- Artículo sobre la correlación de la tasa de matrimonios y el comercio



Geoffrey Taylor (1921)

- Físico inglés, 1886-1975
- Nieto de George Boole
- Trinity College Cambridge
- Artículo sobre difusión continua en dinámica de fluidos

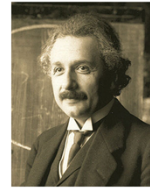
Albert Michaelson (1891)

- Físico estadounidense, 1852-1931
- Premio Nobel Física 1907 por instrumentos ópticos de precisión
- Libro de óptica
- Midió la velocidad de la luz



Albert Einstein (1914)

- Físico alemán, 1879-1955
- Premio Nobel Física 1921 por efecto fotoeléctrico (¡no por la relatividad!)
- Artículo sobre análisis de valores con ruido



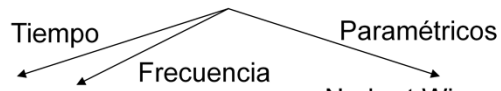
Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

6

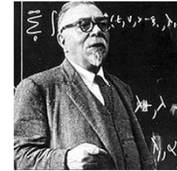
“If I have seen further it is only by standing on the shoulders of Giants.” Carta de Isaac Newton a Robert Hooke en 1676 (Robert Hooke es el de la ley de deformación elástica y el del libro Micrographia).

A hombros de gigantes



Norbert Wiener (1958)

- Matemático estadounidense, 1894-1964
- Doctor a los 18 años
- Estudió con Bertrand Russell (lógica y conjuntos), Godfrey Hardy (teoría de números y análisis), David Hilbert (análisis para mecánica cuántica y relatividad general), Edmund Landau (análisis complejo)
- Libro sobre problemas no lineales con variables aleatorias

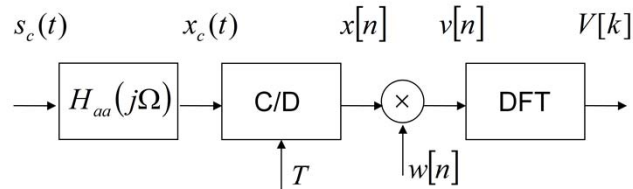


Contenido

- Análisis espectral de señales estacionarias
 - Métodos no paramétricos
 - Análisis espectral usando la DFT
 - Periodograma (Bartlett & Welch)
 - Promediado de periodogramas (Bartlett & Welch)
 - Método de Blackman & Tukey
 - Métodos paramétricos
 - Modelos AR
- Análisis espectral de señales no estacionarias
 - Short-Time Fourier Transform (STFT)

Análisis espectral usando la DFT

Esquema general



$$X_c(j\Omega) = H_{aa}(j\Omega)S_c(j\Omega)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T} - k \frac{2\pi}{T}))$$

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega})$$

$$V[k] = V(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} \longleftrightarrow \Omega_k = \frac{1}{T} \frac{2\pi}{N} k \longrightarrow \Delta\Omega = \frac{2\pi}{NT} \longrightarrow \Delta f = \frac{1}{NT}$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

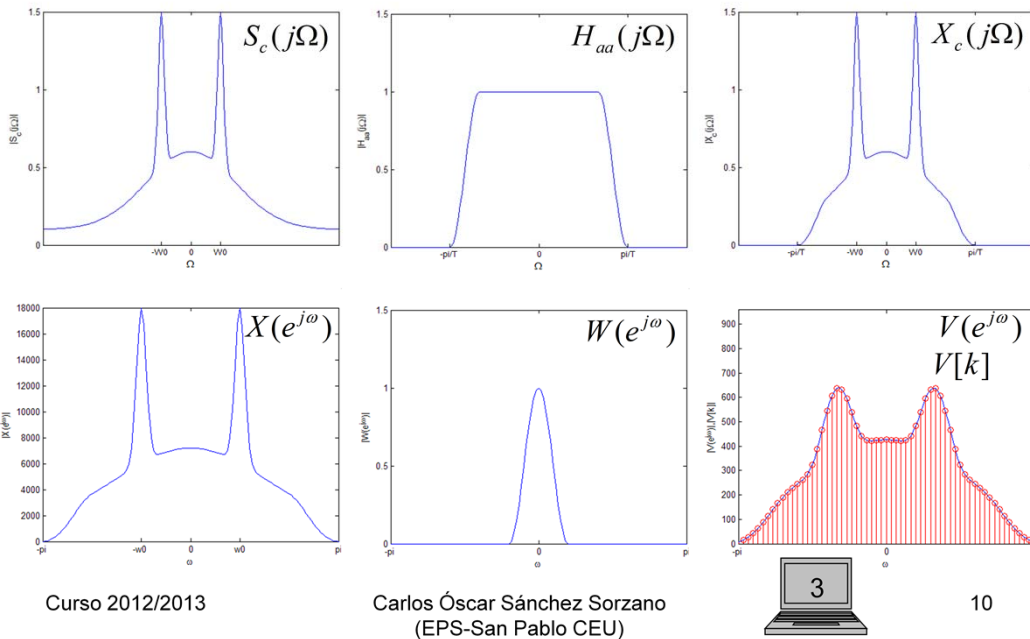
9

Bibliografía: Oppenheim 10.1, Proakis 14.1

Probl Opp: 10.1*, 10.2*, 10.3*

Probl Pro: 14.24

Análisis espectral usando la DFT



Bibliografía: Oppenheim 10.1, Proakis 14.1

Análisis espectral usando la DFT

Efecto del enventanado

Ejemplo:

$$s_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) \quad -\infty < t < \infty$$

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1) \quad -\infty < n < \infty$$
$$\omega_0 = \Omega_0 T$$
$$\omega_1 = \Omega_1 T$$

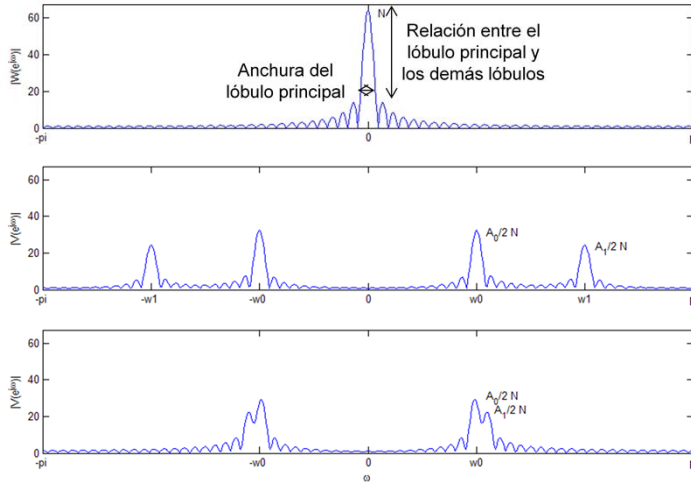
$$v[n] = A_0 w[n] \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 w[n] \cos(\omega_1 n + \theta_1)$$

$$= \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} w[n] e^{j\omega_0 n} + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} w[n] e^{-j\omega_0 n} + \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} w[n] e^{j\omega_1 n} + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} w[n] e^{-j\omega_1 n}$$

$$V(e^{j\omega}) = \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

Análisis espectral usando la DFT

$$V(e^{j\omega}) = \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

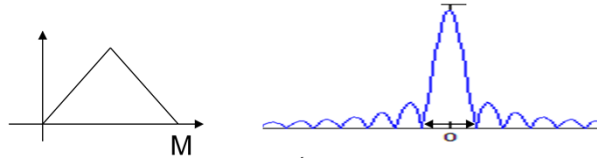


La ventana rectangular tiene el lóbulo principal menos ancho para una longitud dada pero el mayor lóbulo secundario.

Análisis espectral usando la DFT

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

13

Bibliografía: Oppenheim 7.2

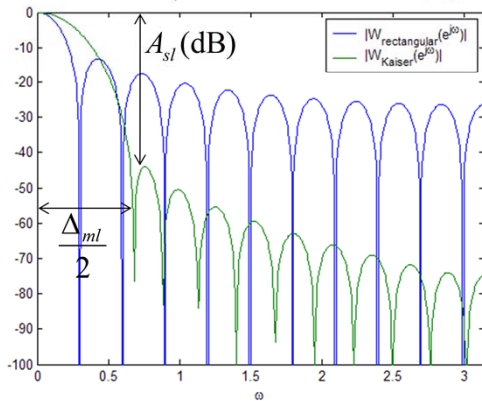
Probl Opp: 10.7*, 10.8*,

Análisis espectral usando la DFT

Efecto del enventanado

Solución: Ventanas de Kaiser

$$\beta = \beta(\delta) = \begin{cases} 0 & A_{sl} < 13.26 \\ 0.76609 (A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834 (A_{sl} - 13.26) & 13.26 \leq A_{sl} \leq 60 \\ 0.12438 (A_{sl} + 6.3) & 60 < A_{sl} < 120 \end{cases}$$



$$A_{sl} = -20 \log_{10} \delta$$

$$M = \frac{24 \pi (A_{sl} + 12)}{155 \Delta_{ml}} + 1$$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

14

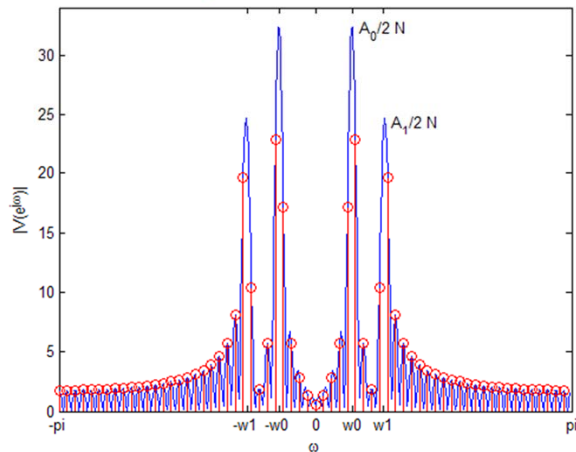
Bibliografía: Oppenheim 10.2

Delta_ml es la semidistancia al cero del primer lóbulo. A_sl es la amplitud (dB) del lóbulo secundario

Análisis espectral usando la DFT

Efecto del muestreo en frecuencia

$$\text{Ejemplo: } v[n] = \begin{cases} \cos(\frac{2\pi}{14}n) + 0.75 \cos(\frac{4\pi}{15}n) & 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Los máximos de la DFT no tienen por qué coincidir con los máximos de la señal. La relación entre picos de la DFT tampoco.



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

15

Bibliografía: Oppenheim 10.2

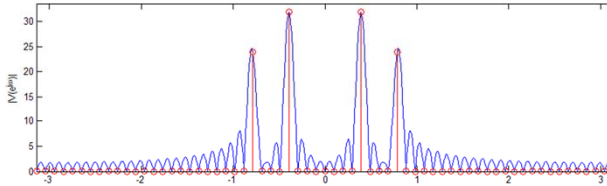
Probl Opp: 10.14*, 10.17*

Análisis espectral usando la DFT

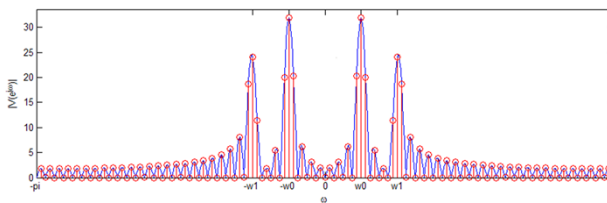
Efecto del muestreo en frecuencia

$$\text{Ejemplo: } v[n] = \begin{cases} \cos(\frac{2\pi}{16}n) + 0.75 \cos(\frac{2\pi}{8}n) & 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Incluso, al variar la longitud de la ventana obtengo resultados muy distintos.



$N = 64$



$N = 128$ (Padding)



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

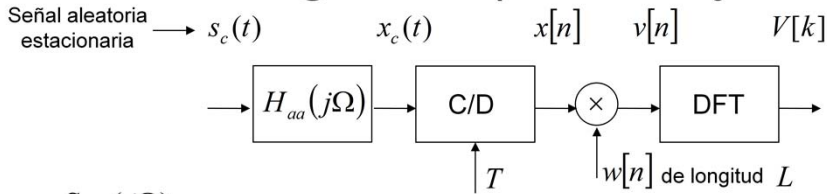
16

Bibliografía: Oppenheim 10.2

Contenido

- Análisis espectral de señales estacionarias
 - Métodos no paramétricos
 - Análisis espectral usando la DFT
 - Periodograma (Bartlett & Welch)
 - Promediado de periodogramas (Bartlett & Welch)
 - Método de Blackman & Tukey
 - Métodos paramétricos
 - Modelos AR
- Análisis espectral de señales no estacionarias
 - Short-Time Fourier Transform (STFT)

Análisis de señales estacionarias: Periodograma (Bartlett y Welch)



$$S_{s_c s_c}(j\Omega)$$

$$S_{x_c x_c}(j\Omega) = S_{s_c s_c}(j\Omega) |H_{aa}(j\Omega)|^2 = \begin{cases} S_{s_c s_c}(j\Omega) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = S_{x_c x_c}(j\frac{\omega}{T}) = \begin{cases} S_{s_c s_c}(j\frac{\omega}{T}) & |\omega| < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$S_{vv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2 \quad U \text{ es un factor de normalización}$$

$$S_{vv}(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{LU} |V[k]|^2 \quad \leftarrow \text{Periodograma}$$

Análisis de señales estacionarias: Periodograma (Bartlett y Welch)

Analicemos un poco más $S_{vv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2$

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} v[n]e^{-j\omega n} \quad v[n] = 0 \text{ salvo en el intervalo } 0 \leq n \leq L-1$$

$$|V(e^{j\omega})|^2 = \left(\sum_{n=0}^{L-1} v[n]e^{-j\omega n} \right) \left(\sum_{n=0}^{L-1} v[n]e^{-j\omega n} \right)^* = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} v[n]e^{j\omega n} v[l]e^{-j\omega l}$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{l=n-(L-1)}^{n+(L-1)} v[n]v[l]e^{-j\omega(l-n)} = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} v[n]v[n+m]e^{-j\omega m}$$

↑ aunque fuera del intervalo $0 \leq l \leq L-1$ sé que $v[l] = 0$

$$= \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} \left(\sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m] \right) e^{-j\omega m} = \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} r_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

$$r_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]$$

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Análisis de señales estacionarias: Periodograma (Bartlett y Welch)

Propiedades

$$E\{S_{vv}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} E\{r_{vv}[m]\} e^{-j\omega m}$$

$$E\{r_{vv}[m]\} = \sum_{n=0}^{L-1} E\{x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]\} = \sum_{n=0}^{L-1} \phi_{xx}[m]w[n]w[n+m] = \phi_{xx}[m]r_{ww}[m]$$

$$E\{S_{vv}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} \phi_{xx}[m]r_{ww}[m]e^{-j\omega m} = \frac{1}{LU} \frac{1}{2\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) \otimes S_{ww}(e^{j\omega}) \rightarrow \text{Sesgo}$$

$$S_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2$$

$$\text{Supongamos que } S_{xx}(e^{j\omega}) = 1, \text{ entonces } E\{S_{vv}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{LU} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{ww}(e^{j\omega}) d\omega$$

$$E\{S_{vv}(e^{j\omega})\} = 1 \Rightarrow U = \frac{1}{L} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{ww}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |w[n]|^2 \rightarrow \text{Asintóticamente incesgado}$$

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Asintóticamente incesgado significa que el sesgo tiende hacia 0 cuando la longitud de la ventana tiende a infinito.

Probl Pro: 14.5, 14.6,

Análisis de señales estacionarias: Periodograma (Bartlett y Welch)

Si $w[n] = u[n] - u[n-L]$, entonces

$$r_{ww}[m] = \begin{cases} L - |m| & |m| < L \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longleftrightarrow S_{ww}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin(\omega \frac{L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2$$

$$\text{Var}\{S_{vv}(e^{j\omega})\} = S_{xx}(e^{j\omega}) \left(1 + \frac{1}{L} S_{ww}(e^{j\omega}) \right)$$

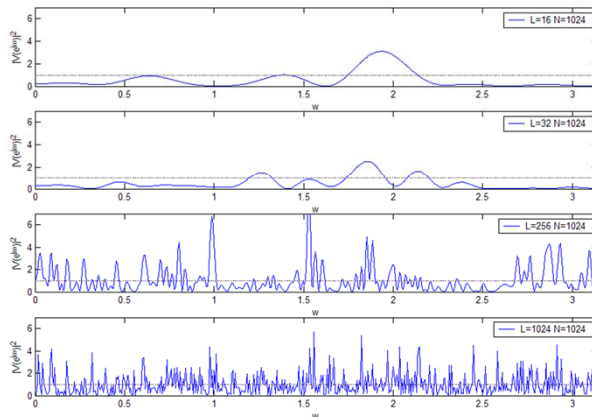
↑
Ventana rectangular y $x[n]$ gaussiano

En otros casos,

$$\text{Var}\{S_{vv}(e^{j\omega})\} \approx S_{xx}(e^{j\omega})$$

Análisis de señales estacionarias: Periodograma (Bartlett y Welch)

Ejemplo: ruido blanco gaussiano de media 0 y potencia 1



Si $L = N$, entonces las
muestras del
periodograma son
independientes.

Applet: <http://users.ece.gatech.edu/~gtz/java/periodogram/notes.html>
<http://users.ece.gatech.edu/~gtz/java/powerspec/notes.html>
http://users.ece.gatech.edu/~gtz/java/periodogram_avg/notes.html

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

22

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Probl Pro: 14.8*

Análisis de señales estacionarias: Promediado de periodogramas

$$v_r[n] = v[rR + n]w[n] \quad 0 \leq n \leq L-1$$

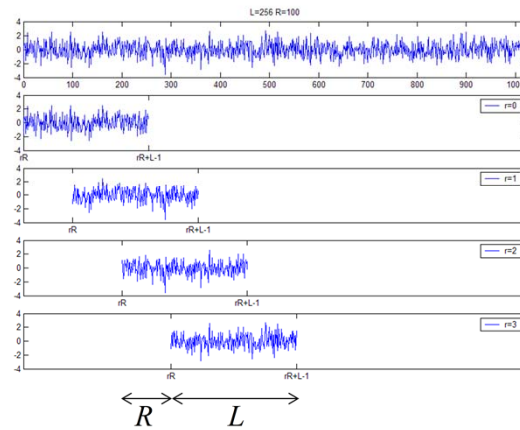
$$S_{v_r v_r}(e^{j\omega}) = \frac{1}{LU} |V_r(e^{j\omega})|^2$$

$$\bar{S}_{vv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} S_{v_r v_r}(e^{j\omega})$$

Propiedades

$$E\{\bar{S}_{vv}(e^{j\omega})\} = E\{S_{v_r v_r}(e^{j\omega})\}$$

$$Var\{\bar{S}_{vv}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{K} Var\{S_{v_r v_r}(e^{j\omega})\}$$



Si $w[n] = u[n] - u[n-L]$, entonces este método se llama de Bartlett.

Curso 2012/2013

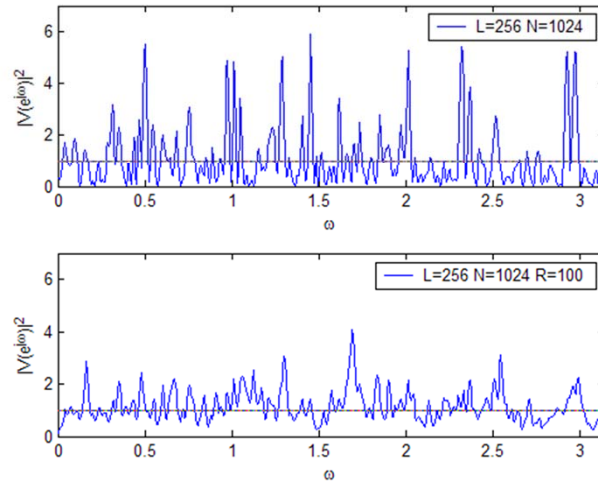
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

23

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Análisis de señales estacionarias: Promediado de periodogramas

Ejemplo: ruido blanco gaussiano de media 0 y potencia 1



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

24

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Análisis de señales estacionarias: A través de la autocorrelación (Blackman & Tukey)

La densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación (Tma. de Wiener-Khintchine)

Sea $w[n] = u[n] - u[n-L]$ y $v[n] = x[n]w[n]$

$$\hat{\phi}_{vv}[m] = r_{vv}[m] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m] = \begin{cases} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-|m|-1} x[n]x[n+|m|] & |m| < L \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$E\{\hat{\phi}_{vv}[m]\} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-|m|-1} E\{x[n]x[n+|m|]\} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-|m|-1} \phi_{xx}[m] = \frac{L-|m|}{L} \phi_{xx}[m] = w_\phi[m] \phi_{xx}[m]$$

$$\check{\phi}_{vv}[m] = \frac{1}{L-|m|} \sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m] \longrightarrow \text{Estimador insesgado}$$

$$\text{Var}\{\hat{\phi}_{vv}[m]\} \approx \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}^2[n] + \phi_{xx}[n-m]\phi_{xx}[n+m]$$

Comparando con el periodograma, resulta que $\hat{\Phi}_{vv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} |V(e^{j\omega})|^2$

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

25

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Probl Pro: 14.1*

Análisis de señales estacionarias: A través de la autocorrelación (Blackman & Tukey)

En cualquier caso, si m es grande, hay pocas muestras disponibles para el estimador por lo que la varianza del estimador es mayor. En el caso del periodograma esta varianza se introducía directamente en el cálculo de la densidad espectral de potencia. Sin embargo, al pasar por la autocorrelación podemos atenuar este efecto por medio de una ventana (simétrica).

$$w_c[n] = 0 \quad \text{salvo en el intervalo} \quad -(M-1) \leq n \leq M-1$$

$$S_{vv}(e^{j\omega}) = TF\{w_c[n]\hat{\phi}_{vv}[n]\} = \frac{1}{2\pi} W_c(e^{j\omega}) \otimes \hat{\Phi}_{vv}(e^{j\omega}) \longrightarrow \text{Suavizado en frecuencia}$$

Para que $S_{vv}(e^{j\omega}) > 0$, se necesita que $W_c(e^{j\omega}) \geq 0$. De las ventanas estudiadas en este curso, sólo la ventana triangular cumple esta condición.

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Análisis de señales estacionarias: A través de la autocorrelación (Blackman & Tukey)

Propiedades

$$E\{S_{vv}(e^{j\omega})\} = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c[m] E\{\hat{\phi}_{vv}[m]\} e^{-j\omega m} = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c[m] \frac{L-|m|}{L} \phi_{xx}[m] e^{-j\omega m}$$

$$= \frac{1}{2\pi} W_c'(e^{j\omega}) \otimes S_{xx}(e^{j\omega})$$

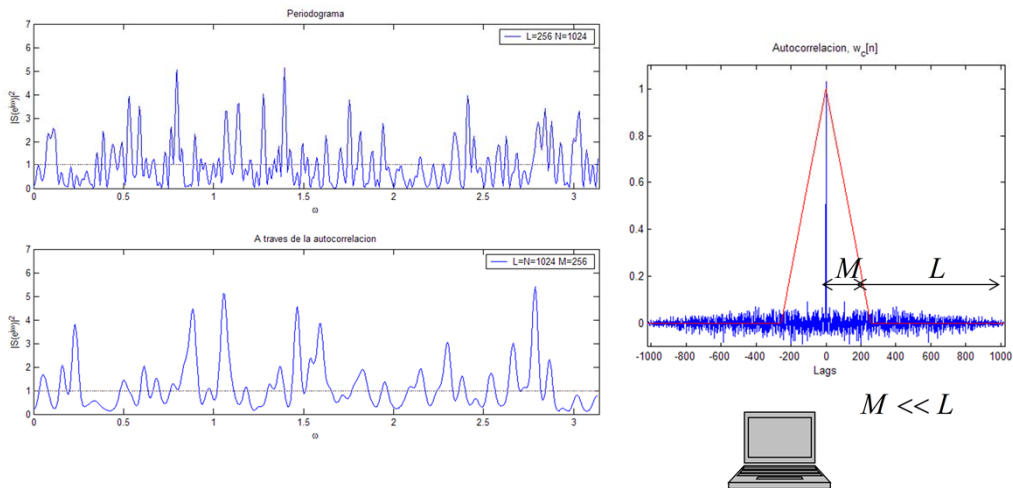
Supongamos que $S_{xx}(e^{j\omega}) = 1$, entonces $S_{vv}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_c'(e^{j\omega}) d\omega = w_c'[0]$

Para que el estimador sea asintóticamente insesgado se necesita que $w_c'[0] = 1$

$$\text{Var}\{S_{vv}(e^{j\omega})\} \approx \left(\frac{1}{L} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} (w_c'[m])^2 \right) S_{xx}^2(e^{j\omega})$$

Análisis de señales estacionarias: A través de la autocorrelación (Blackman & Tukey)

Ejemplo: ruido blanco gaussiano de media 0 y potencia 1



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

28

Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

La atenuación de la correlación a altos lags es porque estoy calculando la autocorrelación enventanada

Resumen de métodos

- Bartlett: promediado de periodogramas, no solapamiento
- Welch: promediado de periodogramas enventanados, con solapamiento
- Blackman-Tukey: transformada de Fourier de la autocorrelación

$$\text{Factor de calidad } Q = \frac{\left(E\{\hat{S}(e^{j\omega})\}\right)^2}{\text{Var}\{\hat{S}(e^{j\omega})\}}$$

$$\text{Bartlett} \quad Q_B = \frac{N}{M} \quad \Delta\omega_B = 2\pi \frac{0.9}{M}$$

$$\text{Welch} \quad Q_W = \frac{16N}{9M} \quad \Delta\omega_W = 2\pi \frac{1.28}{M} \quad \text{Solapamiento 50\%, ventana triangular}$$

$$\text{Blackman-Tukey} \quad Q_{BT} = \frac{1.5N}{M} \quad \Delta\omega_{BT} = 2\pi \frac{0.64}{M}$$

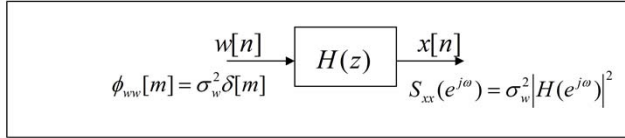
Bibliografía: Oppenheim 10.6, Oppenheim 10.7, Proakis 14.2

Probl Pro: 14.9*

Contenido

- Análisis espectral de señales estacionarias
 - Métodos no paramétricos
 - Análisis espectral usando la DFT
 - Periodograma (Bartlett & Welch)
 - Promediado de periodogramas (Bartlett & Welch)
 - Método de Blackman & Tukey
 - Métodos paramétricos
 - Modelos AR
- Análisis espectral de señales no estacionarias
 - Short-Time Fourier Transform (STFT)

Estimación espectral paramétrica: Modelos AR



$$H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

Modelo AR (Auto Regressive)

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = w[n]$$

Ecuaciones de Yule-Walker

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{\sigma}_w^2(p) = r_{xx}[0] \prod_{k=1}^p (1 - |\hat{a}_k|^2)$$

↑ Error residual:
indicador de la
bondad de la
predicción

Ventajas:

- Representa bien espectros con picos
- Se resuelve con un conjunto de ecuaciones lineales
- En general, se pueden hacer estimaciones de la PSD con menos datos que con el periodograma
- Tma. de descomposición de Wold: cualquier proceso MA o ARMA se puede expresar como un proceso AR (es posible que de orden infinito)

Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

31

Bibliografía: Proakis 14.3

El error residual es una de las salidas de las ecuaciones de Yule-Walker. Aquí lo pongo para refrescar y porque los criterios de selección del orden se basan en esta medida

Probl Pro: 14.13*, 14.16, 14.17

Estimación espectral paramétrica: Modelos AR

Selección del orden del modelo

$p \uparrow\uparrow \longrightarrow$ Picos espurios en el espectro
 $p \downarrow\downarrow \longrightarrow$ Espectro demasiado suave

No se trata de minimizar simplemente $\hat{\sigma}_w^2(p)$ porque esta variable decrece con p
 En su lugar se minimizan otras cantidades.

Akaike: Final prediction error

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_w^2(p) \frac{N+p+1}{N-p-1}$$

N es el número de muestras de $x[n]$ disponibles

Akaike: Akaike Information Criterion

$$AIC(p) = \ln \hat{\sigma}_w^2(p) + \frac{2p}{N}$$

Rissanen: Minimum Description Length

$$MDL(p) = N \ln \hat{\sigma}_w^2(p) + p \ln N$$

Parzen: Criterion of Autoregressive Transfer

$$CAT(p) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\bar{\sigma}_w^2(k)} \right) - \frac{1}{\hat{\sigma}_w^2(p)}$$

$$\bar{\sigma}_w^2(k) = \frac{N}{N-k} \hat{\sigma}_w^2(k)$$

Curso 2012/2013

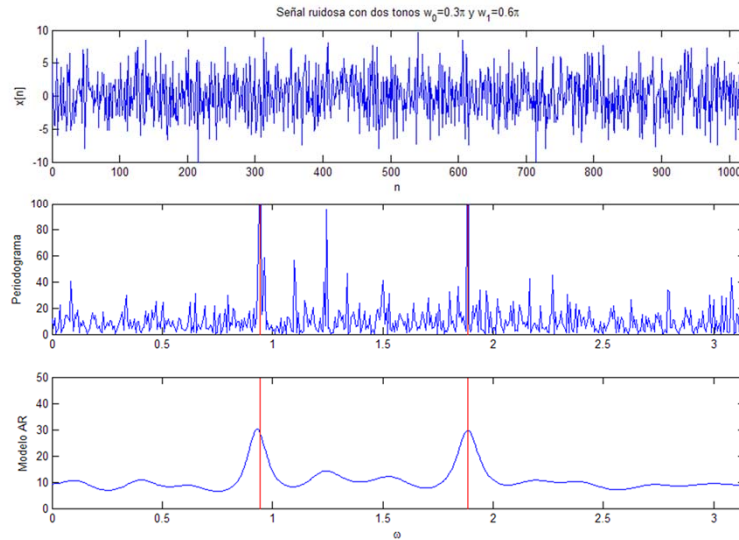
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

32

Bibliografía: Proakis 14.3

Estimación espectral paramétrica: Modelos AR

Ejemplo:



$p = 25$



Curso 2012/2013

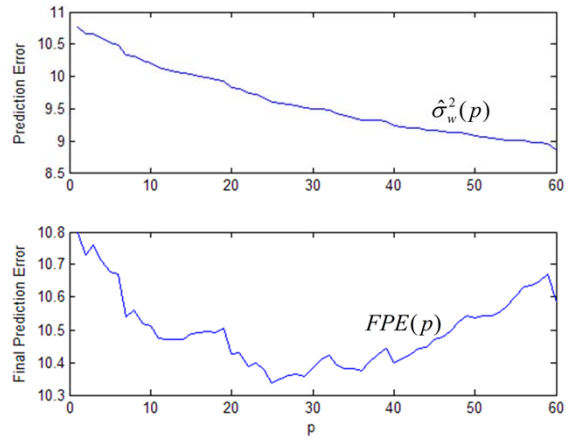
Carlos Oscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

33

Bibliografía: Proakis 14.3

Estimación espectral paramétrica: Modelos AR

Ejemplo:



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

34

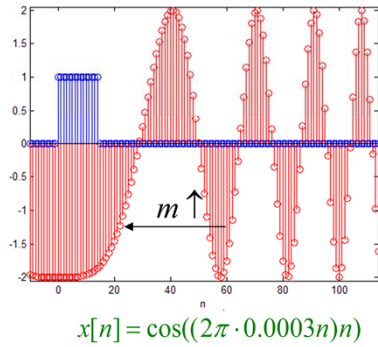
Bibliografía: Proakis 14.3

Contenido

- Análisis espectral de señales estacionarias
 - Métodos no paramétricos
 - Análisis espectral usando la DFT
 - Periodograma (Bartlett & Welch)
 - Promediado de periodogramas (Bartlett & Welch)
 - Método de Blackman & Tukey
 - Métodos paramétricos
 - Modelos AR
- Análisis espectral de señales no estacionarias
 - Short-Time Fourier Transform (STFT)

Short-time Fourier transform

$$X[m, \lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[n]e^{-j\lambda n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']w[-(m-n')]e^{j\lambda(m-n')} = x[m] * h_{\lambda}[m]$$



Donde

$$h_{\lambda}[n] = w[-n]e^{j\lambda n} \longleftrightarrow H_{\lambda}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\lambda-\omega)})$$

$$-\infty < m < \infty$$

$$0 \leq \lambda < 2\pi$$

Entonces, si

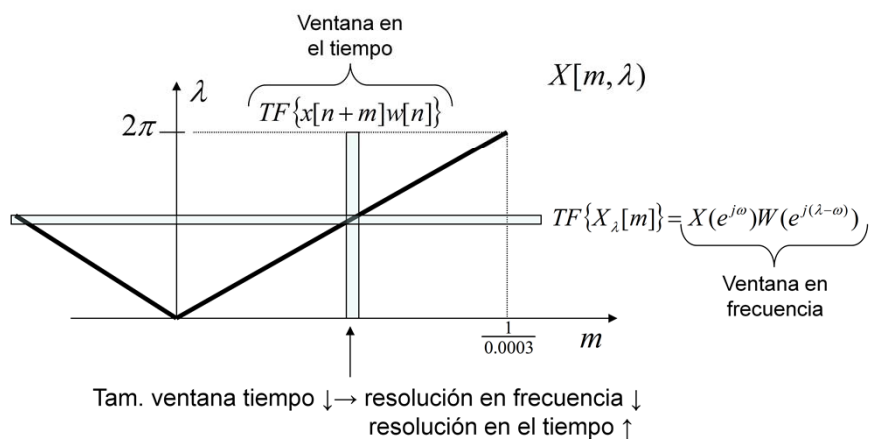
$$X_{\lambda}[m] = x[m] * h_{\lambda}[m]$$

$$TF\{X_{\lambda}[m]\} = X(e^{j\omega})W(e^{j(\lambda-\omega)})$$

Es decir, $X_{\lambda}[m]$ corresponde a una banda de frecuencias

Short-time Fourier transform

Ejemplo: $x[n] = \cos((2\pi \cdot 0.0003n)n)$



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

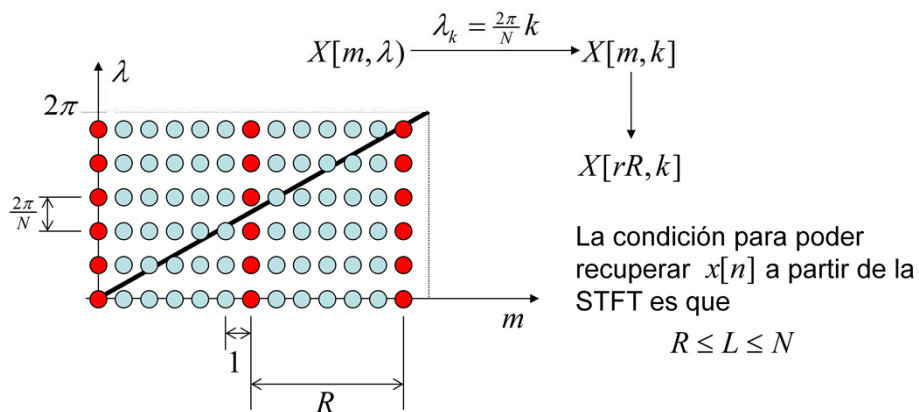
37

Bibliografía: Oppenheim 10.3

Short-time Fourier transform

Muestreo en la STFT

Supongamos que $w[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq L-1$



Curso 2012/2013

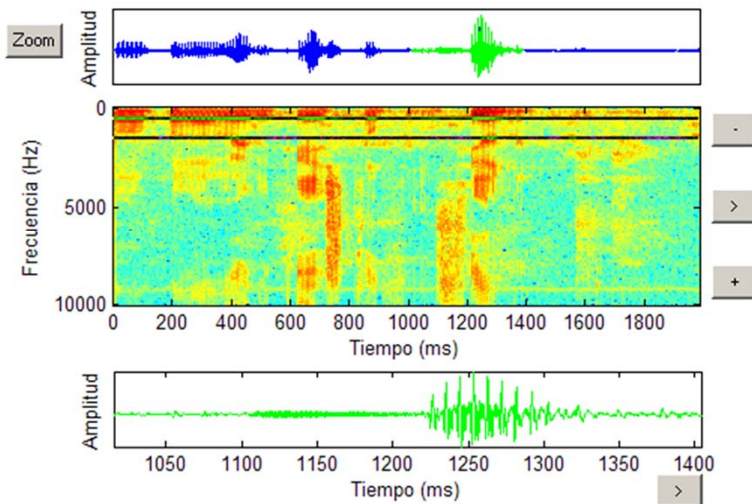
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

38

Bibliografía: Oppenheim 10.3

Short-time Fourier transform

Señal de voz



Frec. Fundamental: 103Hz

Curso 2012/2013

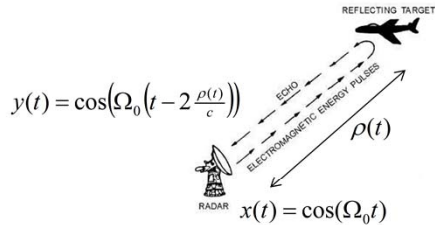
Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

39

Bibliografía: Oppenheim 10.3

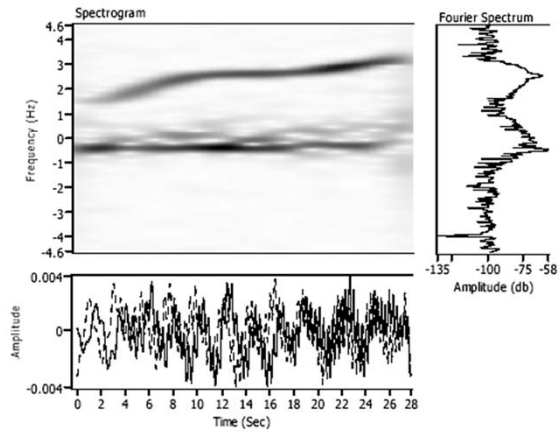
Short-time Fourier transform

Señal de radar



$$\begin{aligned}
 y(t) &= \cos\left(\Omega_0 \left(t - 2 \frac{\rho(t)}{c}\right)\right) \\
 &\approx \cos\left(\Omega_0 \left(t - 2 \frac{\rho_0 + \dot{\rho}_0 t}{c}\right)\right) \\
 &= \cos\left(\Omega_0 \left(1 + 2 \frac{\dot{\rho}_0}{c}\right) t - 2\Omega_0 \frac{\rho_0}{c}\right)
 \end{aligned}$$

La frecuencia depende de la velocidad del objeto



Curso 2012/2013

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
(EPS-San Pablo CEU)

40

Bibliografía: Oppenheim 10.3

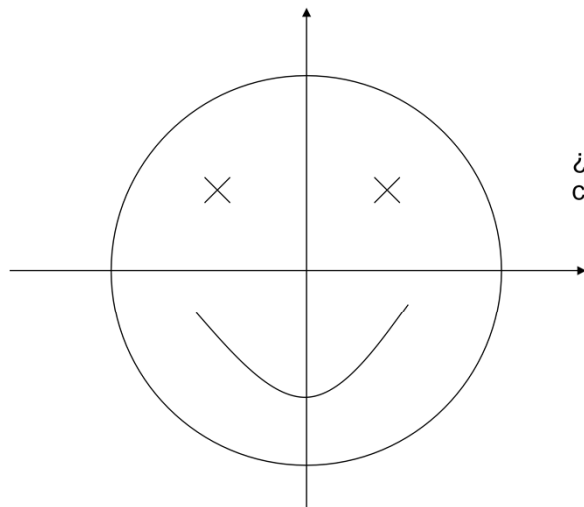
$\rho(t)$ es la distancia de la antena al elemento reflector. c es la velocidad de la luz. El espectrograma lo he cogido de <http://www.mayhu.com/publication/IEEERadar05.pdf>. La línea horizontal cerca de los 0Hz es el sea-clutter.

Resumen

- Análisis espectral de señales estacionarias
 - Métodos no paramétricos
 - Análisis espectral usando la DFT
 - Periodograma (Bartlett & Welch)
 - Promediado de periodogramas (Bartlett & Welch)
 - Método de Blackman & Tukey
 - Métodos paramétricos
 - Modelos AR
- Análisis espectral de señales no estacionarias
 - Short-Time Fourier Transform (STFT)

Resumen

- The Fourier transform film:
 - <http://www.youtube.com/watch?v=XkJpbfGp0hE>



¿Estos dos polos son
complejos conjugados?

¡No!